**PROBABILITAT (1995)** Fac. Econòmiques, UPF.

Professors: F. Udina, A. Kohatsu, O. Gossner

# Deure núm. 1 (entrega: 6 d'octubre)

TEORIA: Espai Mostral, Esdeveniments, freqüència relativa, regles de càlcul de probabilitat, probabilitat de la unió d'esdeveniments, Simulació amb Minitab

**Exercici 1.**– Descriu l'espai de probabilitat associat als experiments aleatoris següents:

i) Tirada d'un dau no trucat i observar el número de la cara obtinguda.

ii) Tirada de dos daus i observar els números de les cares obtingudes.

iii) Tirem 2 monedes (no trucades) i observem el número de cares obtingudes.

iv) Igual que a vi), però amb dues monedes trucades: la probabilitat de cara és el doble que la probabilitat de creu.

v) El 60% dels alumnes d'una classe són noies. Triem tres alumnes a l'atzar i observem el número de noies.

**Exercici 2.**– Tireu 25 vegades una moneda i observeu el número de cares obtingudes. Feu el mateix 10.000 vegades (ajudeu-vos amb ordinador).

**Exercici 3.**– Una caixa té 3 boles blanques i 2 de negres. Fem 500 extraccions amb restitució. Aproximadament, quantes boles blanques obtindrem? Quina serà la proporció aproximada de boles blanques. Feu aquest experiment utilitzant l'ordinador.

**Exercici 4.**– En una ciutat es publiquen tres diaris A, B i C. El 50% de la gent està subscrita a A, el 40% a B i el 30% a C. El 20% està subscrita a A i B, el 10% a A i C , el 20% a B i C i el 5% a A, B i C. Calculeu: i) Percentatge de gent que està subscrita al menys a un diari, ii) percentatge de gent que no està subscrita a cap diari i iii) percentatge de gent que està subscrita exactament a un diari.

**Exercici 5.**– A l'entrada del restaurant un cambrer recull els barrets de 4 clients. A la sortida, el cambrer reparteix a l'atzar els 4 barrets entre els 4 clients. Calculeu la probabilitat que com a mínim un client hagi rebut el seu barret.

**PROBABILITAT (1995)** Fac. Econòmiques, UPF.

Professors: F. Udina, A. Kohatsu, O. Gossner

# Deure núm. 2 (entrega: 13 d'octubre)

TEORIA: Regla de la suma, regla del producte, independencia, + simulació amb Minitab, probabilitat condicionada, teorema de Bayes, t. de la probabilitat total

**Exercici 1.**– En un trajecte de metro utilitzem tres escales mecàniques, A, B i C. L'escala A està avariada aproximadament un de cada 10 dies, l'escala B ho està un de cada set dies i la C, ho està un de cada 15 dies, però les tres escales s'avarien independentment unes de les altres. En un viatge concret, calculeu la probabilitat i) que com a mínim hi hagi una escala avariada, ii) que no n'hi hagi cap d'avariada, iii) que n' hi hagi exactament una d'avariada.

**Exercici 2.**– Utilitzeu l'ordinador per calcular (aproximadament) les probabilitats associades a l'experiment aleatori d'observar el número d'escales avariades en un trajecte dels considerats en l'exercici anterior.

**Exercici 3.**– Tenim quatre fitxes marcades amb les lletres A, B, C, ABC. En triem una a l'atzar. Estudieu si els esdeveniments associats a la presència de les lletres A, B i C són o no independents.

**Exercici 4.**– Un joc consisteix en fer 100 extraccions amb restitució d'una de les urnes següents: Composició Urna A: 1, 2. Composició Urna B: 1,2,3,4. Guanyem en pessetes el número de la bola obtinguda. Quina urna prefereixes?. Quan esperes guanyar amb una jugada?. Fes tres jugades amb l'ordinador.

**Exercici 5.**– Traiem una bola de cada una de les caixes següents:

$$\text{(A)}\ \boxed{1\ 2\ 3}\ \text{i (B)}\ \boxed{1\ 2\ 3\ 4}$$

Trobeu les probabilitats: i) que el número de la caixa A sigui més gran que el de la caixa B; ii) que els dos números siguin iguals i iii) que el número de A sigui més petit que el de B.

**Exercici 6.**– En el cas de les dues opcions següents: (a) tirem un dau 60 vegades, cada vegada que surti un as o un sis guanyeu 5 ptes, en cas contrari no guanyeu res. (b) extraiem 100 vegades amb restitució una papereta de la caixa següent:

$$\boxed{5\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0}.$$

En cada extracció guanyeu en pessetes el número de la papereta obtinguda. Quina opció és la millor? Raoneu la resposta. Jusfiqueu-ho de forma analítica i utilitzant el métode de Monte Carlo.

**Exercici 7.**– Suposem tres caixes amb la següent composició de boles blanques (B) i negres(N). Caixa 1: $\boxed{\text{B N N}}$, Caixa 2: $\boxed{\text{B B N}}$, Caixa 3: $\boxed{\text{B N}}$. Tirem dues monedes i segons obtinguem 0, 1, o 2 cares escollim una bola de la caixa 1, 2 o 3, respectivament. Si la bola escollida es blanca, quina és la probabilitat de que provingui de la caixa 1?.

**PROBABILITAT (1995)** Fac. Econòmiques, UPF.

Professors: F. Udina, A. Kohatsu, O. Gossner

# Deure núm. 3 (entrega: 20 d'octubre)

TEORIA: variables aleatòries, esperança, variància, desviació estàndard

**Exercici 1.**– Trobeu la distribució de probabilitat de les següents variables aleatories:

a) $X$ = Nombre de creus que s'observen en la tirada de 3 monedes

b) $Y$ = Nombre d'asos que s'obtenen en la tirada de 3 daus

c) $Z$ = Nombre d'assignatures aprovades d'un grup de 5 (cada assignatura té una probabilitat d'aprovar de .8. Suposeu independència entre assignatures)

Feu una representació gràfica de diagrama de barres de les distribucions de probabilitat obtingudes. Trobeu també l'esperança, variància i desviació estàndard de les variables $X$, $Y$ i $Z$.

**Exercici 2.**– Un joc consisteix en tirar un dau i obtenir en pessetes el número de la cara del dau mutiplicat per 10. Si per participar en una jugada cal pagar 40 pessetes, calculeu: (a) guany esperat i variància en una jugada; (b) guany esperat i variància en 5 jugades.

**Exercici 3.**– Tirem tres monedes trucades i observem la variable aleatòria $X$ = "nombre de cares obtingudes". Si les monedes ($A, B$ i $C$) estan trucades de manera que les probabilitats de cara de $A$, $B$ i $C$ són, respectivament, .1, .3 i .5, calculeu la distribució de probabilitat de la variable aleatòria $X$. Feu un exercici de Monte Carlo (amb 1000 rèpliques) per comprovar que la distribució de probabilitat obtinguda és encertada. Trobeu també la mitjana aritmètica i la variància de les 1000 rèpliques de la variable $X$. Comproveu que la mitjana aritmètica i la variància de les 1000 rèpliques s'apropa a l'esperança i variància, respectivament, de la variable aleatòria $X$.

**Exercici 4.**– Establim un joc en el que es tira una moneda fins que surt cara i el jugador obté en pessetes 100 multiplicat pel número de vegades que cal tirar la moneda. Quin és el guany esperat en aquest joc?. Si el Casino vol guanyar 20 pessetes per cada jugada, quin és el preu del tiquet en aquest joc?.

**Exercici 5.**– Tirem un dau i una moneda. No guanyem res si la moneda mostra creu, mentres que si surt cara guanyem (en pessetes) 10 vegades el número de la cara del dau. Si el preu d' entrada en el joc és de 20 pessetes, calculeu el valor esperat i desviació estàndard del guany en una jugada.

**Exercici 6.**– Un casino estableix un joc en el que es tira una moneda fins que surt cara i el jugador guanya (en pessetes) dos elevat al número de vegades que calgui tirar la moneda. Pots determinar el preu d'una entrada en aquest joc?. (Aquest problema es coneix com la Paradoxa de San Petersburg).

**PROBABILITAT (1995)** Fac. Econòmiques, UPF.

Professors: F. Udina, A. Kohatsu, O. Gossner

# Deure núm. 4 (entrega: 27 d'octubre)

TEORIA: Distribucions discretes

**Exercici 1.**– Un dau ha estat trucat de manera que la probabilitat de cada cara és proporcional al número de la cara. Obteniu la distribució de probabilitat, esperança i variància de la variable aleatòria corresponent. Feu una representació gràfica de la distribució de probabilitat corresponent. Trobeu la funció de distribució (acumulativa).

Utilitzeu el Minitab per simular 1000 tirades del dau. Calculeu la mitjana i variància d'aquestes 1000 observacions. Compareu aquests valors empírics amb els teòrics. (Nota: escriviu el resultat de la instrucció "Tally" de Minitab aplicat a la variable nombre de la cara del dau; concretament, doneu la distribució de frequències acumulades)

**Exercici 2.**– Sigui $X$ la variable aleatòria que representa el nombre de nens en una família de 4 fills. Expliqueu el significat de:

a) la variable $Y = 4 - X$

b) la variable $W = Y - X$ .

Hi ha independència entre les variables $Y$ i $X$?. Raoneu la resposta.

c) Si en un naixement la probabilitat de nen és .51, trobeu la distribució de probabilitat de $X$, $Y$ i $W$. Trobeu també l'esperança i variància de $X$, $Y$ i $W$.

**Exercici 3.**– En una corba del quilòmetre 22 de la Nacional C-xxxx es produeixen accidents a una mitjana de 1.3 per setmana. Calculeu la probabilitat que en una setmana determinada hi hagi com a mínim 3 accidents. Idem que no n'hi hagi cap. Idem que n'hi hagi entre 1 i 4.

**Exercici 4.**– En relació al problema anterior, feu servir el Minitab per simular els accidents que hi ha hagut al llarg de 100 setmanes. Calculeu la mitjana aritmètica i la variància d'aquestes 100 observacions. Compareu aquests valors empírics (mitjana i variància de les 100 observacions) amb els valors teòrics corresponents. (Nota: escribiu el resultat de la instrucció "Tally" de Minitab aplicat a la variable nombre d'accidents; concretament, doneu la distribució de frequències absolutes)

**Exercici 5.**– En una illa del Carib cada any hi ha com a mínim un, però mai més de 3, huracans. La probabilitat de $x$ huracans és inversament proporcional a $x$. Trobeu la distribució de probabilitat de la variable nombre d'huracans, $X$, així com la seva esperança i variància. Feu un diagrama de barres que representi la distribució de probabilitat de $X$. Idem per la funció de distribució acumulativa. Simuleu amb el Minitab el nombre d'huracans al llarg de 30 anys; calculeu la mitjana i variància dels 30 valors simulats i compareu-los amb la mitjana i variància teòriques.

**Exercici 6.**– En relació al problema anterior, en una companyia d'assegurances es presenta un client que va a passar una any en aquesta illa. El client sol.licita una assegurana de vida. La prima és de 10 milions de pessetes a entregar a la vídua en cas que el client es mori pels efectes d'un huracà. Suposant que la probabilitat de mort en un huracà és de .3, trobeu el preu d'aquesta prima d'assegurança.

**Exercici 7.**– Utilitzant la funció generatriu de moments, trobeu el moment de tercer ordre d'una distribució binomial de paràmetres $n$ i $p$.

**PROBABILITAT (1995)** Fac. Econòmiques, UPF.

Professors: F. Udina, A. Kohatsu, O. Gossner

# Deure núm. 5 (entrega: 3 de novembre)

TEORIA: Distribucions bivariants discretes

**Exercici 1.**– Amb l'objectiu de fer diners de viatge de curs, uns estudiants del curs de Probabilitat han montat el joc següent. Es juga per parelles, jugadors 1 i 2 . Es decideix a cara i creu jugar amb la urna 1 (U1) o amb la urna 2 (U2). Una vegada escollida la urna, els jugadors extreuen, un després de l'altra, una bola de la urna (extracció sense reposició). Els jugadors cobren de o pagen als organitzadors del joc (depen del signe, + o -) en duros el número que mostra la bola obtinguda. Sigui X el guany (o perdua) del jugador 1, i Y el guany o perdua del jugador 2. La composició de les urnes és la següent: $U1: -100 \quad -100 \quad 0$; $U2: -10000 \quad 0 \quad 10000$. Es demana:

1. Guany esperat del estudiants (casino) en cada jugador. Guany esperat del casino en el conjunt dels dos jugadors. Calculeu també la variància de $X$ i $Y$.
2. Distribució de probabilitat conjunta de $X$ i $Y$. Distribucions marginals.
3. Distribució de $Y$ condicionada a que $X = 0$.
4. Esperança $E(Y \mid X = 0)$.
5. Funció (corba) de regressió $E(Y \mid X)$
6. Covariància i coeficient de correlació entre $X$ i $Y$.
7. Esperança i Variància de les variables $Z = X + Y$, $T = X - Y$.
8. Resoldre de nou els apartats anteriors considerant el cas ara en que les extraccions de la urna és fan amb reposició ( és a dir, el jugador 1 retorna la bola a la urna abans de l'extracció del jugador 2).

**Exercici 2.**– Construeix una distribució discreta (la que vulguis)

| $X$ | 1 | 2 | 3 | ... | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X)$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | ... | $p_n$ |

tal que tingui coeficient d'assimetria positiu. Idem que tingui coeficient d'assimetria negatiu. En ambdós casos, calcula també el coeficient d'apuntament. Genera amb `Minitab` 1000 valors de cada una d'aquestes distribucions. Fes un recompte dels valors obtinguts, i comprova si es compleix la desigualtat de Chebyshev amb les teves dades.

**PROBABILITAT (1995)** Fac. Econòmiques, UPF.

Professors: F. Udina, A. Kohatsu, O. Gossner

# Deure núm. 6 (entrega: 10 de novembre)

TEORIA: Llei de l'esperança iterada, distribucions condicionals, moments de distribucions

**Exercici 1.**– Un joc es juga en dues etapes, de la següent manera. Primer es tira un dau no trucat i s'anota el número $X$ de la cara obtinguda. Després s'esculleix a l'atzar un número $Y$ de la Urna $X$. La composició de boles en les sis urnes és tal que en cada urna hi ha un total de 10 boles, $X$ de les quals estan marcades amb 1 i la resta estan marcades amb 0. Es demana

1. $EX, EY, V(X), V(Y)$
2. $E(3Y^2 + 1)$
3. $\sigma_{XY}$, $\rho_{XY}$
4. $E(Y \mid X)$ i $E(X \mid Y)$
5. CA i CAp de $X$ i $Y$

**Exercici 2.**– Un auditor que esta revisant una empresa decideix quantes factures de cada mes ($X$) revisa segons una distribució binomial de paràmetres 10 i 0.3. Sap per experiència que el temps que necessita per revisar $x$ factures és una variable aleatòria $Y$ que ve donada per:

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{10-x}{x}\left(\frac{x}{10}\right)^y$$

i) Quina és la distribució marginal de $X$?
ii) Comprova que $f_{Y|X=x}(y)$ dona realment una distribució de probabilitat per cada valor de $x$.
iii) Pots donar la distribució conjunta de $X$ i $Y$?
iv) Construeix també la taula de la funció de distribució (acumulada)

$$F_{XY}(x, y) = P[X \leq x \cap Y \leq y].$$

v) Calcula la esperança de $Y$ condicionada a $X$.

**Exercici 3.**– Calcula, per una distribució geomètrica de paràmetre $p$, els coeficients d'asimetria i d'apuntament. Calcula també el coeficient de variació.

**Exercici 4.**– En una urna hi ha 3 boles blanques i 2 boles negres. Efectuem dues extraccions i prenem $X = 1$ si la primera és blanca, $X = 0$ si la primera és negra. Prenem $Y$ igual però mirant la segona bola. Considera els dos casos: a) Les extraccions es fan sense restitució, b) es fan amb restitució, i en cada cas calcula:

i) La distribució de probabilitats conjunta i les marginals de $X$ i$Y$.
ii) Les esperances.
iii) La covariança i la correlació.

**PROBABILITAT (1995)** Fac. Econòmiques, UPF.

Professors: F. Udina, A. Kohatsu, O. Gossner

# Deure núm. 7 (entrega: 17 de novembre)

TEORIA: distribucions continues, funció de densitat de probabilitat, funció de distribució, quartils, percentils, moments

**Exercici 1.**– Una variable aleatòria $X$ té la següent funció de densitat de probabilitat:

$f(x) = (4/3)(1 - x^3)$ per $x \in [0, 1]$, i $f(x) = 0$ , per $x \notin [0, 1]$. Comproveu que $f(x)$ és una funció de densitat i feu una representació gràfica de $f(x)$.

Trobeu:

1. $F(x)$
2. $EX, VX$
3. $P[0.2 < X < 0.5]$
4. Mediana, Primer quartil, Percentil 85.
5. Esperança i Variància de la variable $Y = -4X + 3$

**Exercici 2.**– Sigui $X$ la variable aleatòria amb distribució uniforme a l'interval [-2, 5]. Trobeu:

1. $f(x)$ i $F(x)$
2. $EX, VX$
3. $P[-2 < X \leq 3]$
4. Mediana, Primer quartil, Percentil 85.
5. Esperança i Variància de la variable $Y = -X + 10$

**Exercici 3.**– Utilitzeu Minitab per simular 1000 observacions de la variable de l'exercici anterior. Calculeu la mitjana i Variància de les 1000 observacions .

**Exercici 4.**– Una variable aleatòria continua pren valors de 0 a 10 amb probabilitat inversament proporcional al valor de la variable. Trobeu:

1. $f(x)$ i $F(x)$
2. $EX, VX$
3. $P[2, 5]$
4. Mediana, Primer quartil, Percentil 85.

**Exercici 5.**– Considereu deu variables (`C1-C10`) independents cada una amb distribució uniforme a [0,1]. Estudieu la distribució de la variable $Y$ = suma de les deu variables (`C1-C10`). Calculeu de forma exacta la esperança i Variància de la suma. Investigueu si la suma $Y$ té distribució uniforme. Calculeu aproximadament la probabilitat que $Z = Y/10$ estigui entre 0.4 i 0.6. (Indicació: Feu 1000 observacions de la variable suma i observeu la forma de l'histograma i les proporcions corresponents).

**PROBABILITAT (1995)** Fac. Econòmiques, UPF.

Professors: F. Udina, A. Kohatsu, O. Gossner

# Deure núm. 8 (entrega: 24 de novembre)

TEORIA: distribucions contínues: uniforme, exponencial, normal

**Exercici 1.**– L'interval de temps $X$ entre l'arribada de dos vehicles a una gasolinera segueix una distribució exponencial de mitjana 3 minuts. Trobeu:
a) les funcions de densitat i de distribució de la variable $X$.
b) A partir del moment de l'arribada d'un vehicle, probabilitat que com a mínim passin 5 minuts sense arribar-ne cap més.
c) Percentil 95 de la distribució. Comenteu el seu significat.
d) Si han passat 5 minuts després de l'arribada d' un vehicle, probabilitat que passin 3 minuts més sense arribar-ne cap.

**Exercici 2.**– El temps $X$ que tarda a arribar un autobús (a partir del moment que arribo a la parada) segueix una distribució uniforme de 0 a 10 minuts. Determineu:
a) Valor esperat de $X$.
b) Probabilitat que tingui d'esperar-me més de 3 minuts.
c) Percentil 95 de la distribució. Expliqueu-ne el significat.
d) Si ja portem 5 minuts esperant, probabilitat que m'hagui d'esperar 3 minuts més. Compareu el resultat d'aquest apartat amb l'obtingut a l'apartat d) de l'exercici anterior.

**Exercici 3.**– La distribució de les notes d'un examen test és, aproximadament, normal amb valor esperat 5.85 i desviació típica 1.72. Calcula:
a) El percentatge de gent que està per sobre la puntuació 5 (aprovat en la prova test).
b) El percentatge de gent que té puntuació entre 5 i 7.
c) El percentil de la teva nota en el darrer examen test segons aquest model. Com l'interpretes? c) Calcula i interpreta els quartils de la distribució.

**Exercici 4.**– Obteniu 1000 observacions d'una variable X amb distribució N(4, 16). Feu un histograma dels 1000 valors de X. Feu el mateix per una variable Y amb distribució exponencial de paràmetre l igual a 0.25. El mateix per una distribució uniforme a [-2 10]. Compareu els tres histogrames.

**Exercici 5.**– El nombre d'errades mecanogràfiques per pàgina d'una secretària segueix una distribució de Poisson de valor esperat 10. Calculeu la probabilitat que en una pàgina es trobin entre 8 i 15 errades. Feu els càlculs:
a) Utilitzant l'aproximació normal i la taula corresponent a $\Phi(x)$.
b) Càlcul directe utilitzant la instrucció `CDF` de Minitab corresponent a la distribució de Poisson.
Compareu els resultats obtinguts.

**Exercici 6.**– Tirem 500 vegades un dau. Calculeu la probabilitat que el nombre d'asos obtingut estigui entre 80 i 100. (*Nota*: Utilitzeu l'aproximació normal a la binomial).

**PROBABILITAT (1995)** Fac. Econòmiques, UPF.

Professors: F. Udina, A. Kohatsu, O. Gossner

# Deure núm. 9 (entrega: 1 de desembre)

TEORIA: Distribucions relacionades amb la Normal. Convergència de variables aleatories. Mètode de Monte-Carlo.

**Exercici 1.**– Volem calcular el valor total $S$ de la suma de 2000 factures. Per facilitar el processament de les dades, sumem els imports de les factures arrodonits a milers i obtenim la suma aproximada $S^*$. Trobeu la probabilitat que $S$ i $S^*$ difereixin en més de 10000.

Nota: utilitzeu la hipòtesi que per cada factura, la diferència entre el valor exacte i l'arrodonit segueix una distribució uniforme a $[-500, 500]$.

**Exercici 2.**– El percentatge de gent que està a favor de limitar la circulació de cotxes privats a la ciutat de Barcelona és del 60%. Per una persona escollida a l'atzar, considerem la variable que pren el valor 1 si la persona està a favor de la limitació i 0 en cas contrari. Considerem les variables $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ associades a deu persones escollides a l'atzar. Considereu la variable $\bar{X} = \sum_i X_i/10$.
a) Trobeu la probabilitat que $\bar{X}$ estigui comprés entre 0.55 i 0.65.
b) Idem en el cas que el nombre d'entrevistats sigui 100 enlloc de 10.
c) Trobeu $N$, el nombre d'entrevistats, per tal que aquesta probabilitat sigui del 95%.

**Exercici 3.**– Els salaris d'una empresa segueixen una distribució log-normal. Si el 2% cobra més de 4.800.000 ptes i el 12% cobra menys de 200.000 ptes, trobeu la proporció de gent que té un salari comprès entre 250.000 i 350.000 ptes.

**Exercici 4.**– Suposem que $X$ és una variable aleatòria amb funció de densitat $f(x) = 2x$ quan $x \in [0, 1]$ i igual a 0 quan $x \notin [0, 1]$. Considereu la variable $Y = \sqrt{X}$.
a) Trobeu la funció de densitat de probabilitat, funció de distribució, esperança, variància, coeficient d'assimetria i d'apuntament de la variable $Y$
b) Obtingueu 1000 observacions de la variable aleatòria $Y$ de l'exercici anterior i feu una descripció estadística d'aquestes 1000 observacions. Compareu els valors mostrals de la mitjana aritmètica, variància, asimetria i apuntament amb els corresponents valors poblacionals de $Y$.

**Exercici 5.**– Considereu la variable aleatòria $Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ on les $X_1$ són variables aleatòries independents amb distribució idèntica a la distribució $X$ de l'exercici anterior. Trobeu el valor exacte de l'esperança i variància de la variable $T = Y/5$. Utilitzant la desigualtat de Chebyshev doneu una fita de la probabilitat $P[\mu - 0.3 < T < \mu + 0.3]$ on $\mu$ és l'esperança de $T$. Feu el mateix però ara considerant que la suma que defineix $T$ és de 50 variables i no solament de 4.

Avalueu la qualitat de l'aproximació normal a la probabilitat de l'interval en els dos casos.