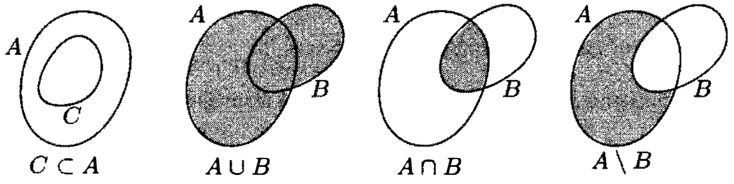

FIGURA 1.6 Diagramas de Venn.

cambio, es más difícil hacer lo mismo en el caso de la fórmula

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \tag{$*$}$$

válida para toda terna A, B, C de conjuntos. Usando diagramas de Venn se ve inmediatamente que la parte sombreada de la Figura 1.7 representa a los conjuntos de ambos lados de la igualdad $(*)$, que queda así demostrada.

Cuando se dibuja un diagrama de Venn para tres conjuntos A, B, C, es importante hacerlo de tal forma que se representen todas las relaciones posibles entre un elemento y cada uno de los conjuntos. En otras palabras, deben ser no vacíos los ocho conjuntos siguientes: (1): $(A \cap B) \setminus C$; (2): $(B \cap C) \setminus A$; (3): $(C \cap A) \setminus B$; (4): $A \setminus (B \cup C)$; (5): $B \setminus (C \cup A)$; (6): $C \setminus (A \cup B)$; (7): $A \cap B \cap C$; y (8): $\mathcal{C}(A \cup B \cup C)$. (véase Figura 1.8). Obsérvese que esta forma de representar conjuntos se vuelve pronto inmanejable. En efecto, cuando hay 4 conjuntos en un diagrama de Venn, el número de regiones es de $16 \,(= 2^4)$ al menos.

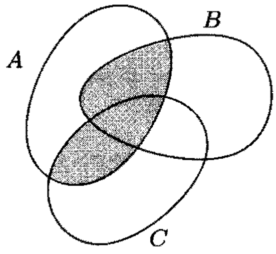

FIGURA 1.7

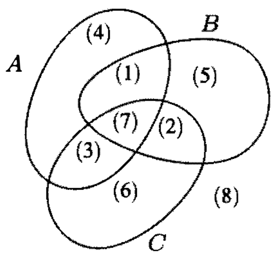

FIGURA 1.8

Se comprueba inmediatamente a partir de las definiciones de unión e intersección (o con diagramas de Venn) que $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ y $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$. Por tanto, no importa el lugar donde se coloquen los paréntesis. En tales casos se suprimen los paréntesis y las expresiones se escriben $A \cup B \cup C$ y $A \cap B \cap C$. Sin embargo, no se pueden quitar los paréntesis de expresiones como $A \cap (B \cup C)$ porque este conjunto no siempre es igual a $(A \cap B) \cup C$. Demuéstrese este hecho mediante diagramas de Venn o con el ejemplo $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3\}$, $C = \{4,5\}$.

Problemas

1 Sean $A = \{2,3,4\}$, $B = \{2,5,6\}$, $C = \{5,6,2\}$ y $D = \{6\}$.

(a) Deducir si los enunciados siguientes son ciertos: $4 \in C$; $5 \in C$; $A \subset B$; $D \subset C$; $B = C$; $A = B$.

(b) Calcular $A \cap B$; $A \cup B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$; $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$; $A \cup B \cup C \cup D$; $A \cap B \cap C$; $A \cap B \cap C \cap D$.

2 (a) ¿Es la misma persona el mayor pintor entre los poetas que el mayor poeta entre los pintores?
(b) ¿Es la misma persona el pintor más viejo entre los poetas que el poeta más viejo entre los pintores?

3 Usando las notaciones del Ejemplo 1.12, escribir los siguientes enunciados en la terminología de la teoría de conjuntos:
(a) Todos los estudiantes de biología hacen matemáticas.
(b) En el coro de la universidad hay mujeres que estudian biología.
(c) Todas las mujeres que ni juegan al tenis ni están en el coro universitario estudian biología

4 Sean F, M, C, B, T los conjuntos del Ejemplo 1.12. Describir los conjuntos siguientes: $F \cap B \cap C$; $M \cap F$; $\big((M \cap B) \setminus C\big) \setminus T$.

5 Demostrar las fórmulas siguientes, bien usando las definiciones, bien los diagramas de Venn:
(a) $A \cup B = B \cup A$ (b) $A \cup A = A$
(c) $A \cap A = A$ (d) $A \cap \emptyset = \emptyset$
(e) $A \cup \emptyset = A$ (f) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

6 Determinar cuáles de las fórmulas siguientes son correctas. Si alguna no lo es, dar un contraejemplo. Usar diagramas de Venn si sirven de ayuda.
(a) $A \setminus B = B \setminus A$ (b) $A \subset B \iff A \cup B = B$
(c) $A \subset B \iff A \cap B = A$ (d) $A \cap B = A \cap C \Longrightarrow B = C$
(e) $A \cup B = A \cup C \Longrightarrow B = C$ (f) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$

7 Hacer la lista completa de los subconjuntos del conjunto $\{a, b, c\}$. ¿Cuántos hay, incluyendo el vacío y el total? Hacer lo mismo con el conjunto $\{a, b, c, d\}$.

8 Una encuesta dio como resultado que a 50 personas les gustaba el café, a 40 el té, a 35 ambos y a 10 ninguno de los dos. ¿Cuántas personas respondieron a la encuesta?

9 Sea A un conjunto con un número finito de elementos, y designemos por $n(A)$ a este número. Si A y B son conjuntos finitos cualesquiera, probar que:
(a) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
(b) $n(A \setminus B) = n(A) - n(A \cap B)$

10 Si A y B son conjuntos arbitrarios, se define la **diferencia simétrica** entre A y B por la relación

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Evidentemente, $A \triangle B = B \triangle A$ mientras que, en general, $A \setminus B \neq B \setminus A$. Usando diagramas de Venn, o de cualquier otra forma, probar:
(a) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
(b) $(A \triangle B) \triangle C$ consta de los elementos que pertenecen a sólo uno de los conjuntos A, B, C, o bien que están en los tres.

11 Una de las identidades siguientes no es válida en general. ¿Cuál es?
(a) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$
(b) $(A \cap C) \triangle B = (A \triangle B) \cap (C \triangle B)$
(c) $A \triangle A = \emptyset$

12 (a) Mil personas respondieron a una encuesta destinada a averiguar qué periódico, A, B o C, leían en un cierto día. Las respuestas fueron que 420 leían A, 316 leían B y 160 leían C. Entre los encuestados, 116 leían A y B, 100 A y C, 30 B y C y 16 leían los tres.

(i) ¿Cuántos leían A pero no B?
(ii) ¿Cuántos leían C, pero no A ni B?
(iii) ¿Cuántos no leían ninguno?

(b) Desígnese por Ω al conjunto de los 1.000 encuestados (el conjunto universal). Aplicando la notación del Problema 9, tenemos que $n(A) = 420$ y $n(A \cap B \cap C) = 16$, por ejemplo. Hallar los números de la parte (a) de manera semejante. Averiguar por qué es válida la ecuación siguiente

$$n\big(\Omega \setminus (A \cup B \cup C)\big) = n(\Omega) - n(A \cup B \cup C)$$

(c) Probar que, si A, B, C, son conjuntos finitos cualesquiera, entonces

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) \\ - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$