

El llenguatge de les matemàtiques

Projecte Math21, Departament Economia i Empresa, UPF

25 de març de 2021

Índex

1	Objectius d'aprenentatge	2
2	Prerequisits	2
3	Guia pel professor	2
3.1	Presentació del tema	2
3.2	Materials bàsics	2
4	Activitats autònomes	3
4.0.1	Conjunts	3
4.0.2	Negació	3
4.0.3	Video sobre condicions suficients o necessàries	3
4.0.4	Implicació	4
4.0.5	Video sobre implicació i negació	5
4.0.6	Video sobre proposicions condicionals i veritat	5
4.0.7	Conjuncions, disjuncions i negació	5
4.0.8	Demostracions senzilles	6
4.0.9	$\sqrt{2}$ és irracional	6
5	Llista d'exercicis	6
5.0.1	Petites demostracions	6
5.0.2	Eficiència Pareto	6
6	Suplements avançats	7
7	Exercicis per exàmens	7

Aquest és un document de treball INTERN, en fase de discussió i molt preliminar. No en feu difusió, sisplau.

([Enllaç al document principal](#))
([Enllaç a la versió pdf d'aquest document](#))
([Enllaç a la font LaTeX](#))
([Enllaç als fitxers de les figures](#))

1 Objectius d'aprenentatge

- Les beceroles del llenguatge formal
 - Les connectives lògiques: conjunció, disjunció, negació, implicació
 - Proposicions
 - Tots o algú, els quantificadors
- El llenguatge dels conjunts
 - Conjunts i elements
 - Unió, intersecció, subconjunts
- El raonament matemàtic
 - Definició, propietats, teoremes
 - Demostracions

2 Prerequisits

No se'n presuposen.

3 Guia pel professor

3.1 Presentació del tema

Motivació: la necessitat del llenguatge formal per expressar idees de manera unívoca, per evitar ambigüitats.

En matemàtiques utilitzem lletres i altres símbols per representar no només nombres, també altres objectes, com funcions, conjunts, o també proposicions, afirmacions que poden ser veritat o falses.

Caldrà fer el pont i el contrast entre el llenguatge formal i el llenguatge usual.

Començar amb exemples de demostracions errònies, arguments falços, frases ambigües, etc

Empalmar amb demostracions senzilles tipus $n + n$ és parell (IB-HL-An&App 5.1)

Introduir els símbols i els conceptes a través d'exemples i deixar-ho obert per les activitats autònomes.

3.2 Materials bàsics

SH-MAE:

- SH-MAE: 1.5 Algunos aspectos de lógica
- SH-MAE: 1.6 Demostración matemática
- SH-MAE: 1.7 Teoría de conjuntos

IB-HL-An&App

- 5. Proofs
- 5.1 Basic Laws and simple proofs
- 5.2 Direct proofs

4 Activitats autònomes

4.0.1 Conjunts

Pots llegir SH 1.7, o mirar-te aquests videos:

[The Importance of Set Theory — Silvia Jonas](#)

[INTRODUCTION to SET THEORY \(The Trev Tutor\)](#) 16 min.

[\[Discrete Mathematics\] Set Operations Examples #2 \(The Trev Tutor\)](#)

[Set Operations & Venn Diagrams, part 1 127-1.20.a HCC MathHelp](#) 9min.

[Set Operations & Venn Diagrams, part 2 127-1.20.b](#) 9 min.

[Set Operations & Venn Diagrams, part 3 127-1.20.c](#) 6min.

QUIZZ

Si A és el conjunt dels jugadors del Barça a la temporada 2019/20.

= Messi és un subconjunt de A

== Messi és un element de A

SET OPERATIONS - [SET OPERATIONS - DISCRETE MATHEMATICS, Trev Tutor](#) 7min.

4.0.2 Negació

Llegeix l'exemple 5.3 del IB-HL-An&App.

Respón aquest qüestionari.

La negació de la frase “A l’Anna li agrada la música pop” és

= A l’Anna no li agrada la música

= A l’Anna li agrada la música no-pop

= Si no l’hi agrada la música pop, no és l’Anna

= A l’Anna no li agrada la música pop

La negació de $2 < x < 4$ és

= $x > 4$

= $x \leq 2$

= $x \geq 4$ i $x \leq 2$

= $x \geq 4$ ó $x \leq 2$

...

4.0.3 Video sobre condicions suficients o necessàries

[Necessary and Sufficient Conditions, Dr. Trefor Bazett](#) (8min)

millor: [Propositional Logic: Necessary and Sufficient Kevin deLaplante](#)(5min)

QUIZZ

Marca les correctes:

Si diem que p implica q

= p és condició necessària per q

= p és condició suficient per q

= q és condició necessària per p

= q és condició suficient per p

QUIZZ

Marca les correctes:

= Ser un hipopòtam és CN per ser un animal

= Ser bomber és CS per ser persona

= Ser un cotxe és CN per ser una màquina
 = Tenir 18 anys és CN per treure's el carnet de conduir.
 ...

4.0.4 Implicació

Mira't l'exemple 5.1, pag 217 del IB-AnAppr:

Example 5.11

Let $m, n \in \mathbb{Z}$. Prove that m and n are both odd if and only if (iff) the product mn is odd.

Proof

There are two statements here:

$(\Rightarrow)$ If m and n are both odd, then the product mn is odd.

$(\Leftarrow)$ If the product mn is odd, then both integers m and n are odd.

Most often when there are two directions we have to prove them separately.

$(\Rightarrow)$ This was proved in Example 5.10

$(\Leftarrow)$ If the product mn is odd, then there are two cases to consider:

- at least one of m or n is even
- m and n are both odd.

In the first case, say m is even. That is, $m = 2k$ for some integer k and thus $mn = 2kn$ is even, which cannot be true. Thus, we are only left with both numbers being odd. This kind of proof may be called proof by exhaustion. An alternative approach will be outlined in section 5.3.

Fes ara aquests exercicis:

Exercise 5.2 & 5.3

- Prove or disprove the given conjecture.
 - There is an even integer that can be expressed as the sum of three even integers.
 - Every even integer can be expressed as the sum of three even integers.
 - There is an odd integer that can be expressed as the sum of two odd integers.
 - Every odd integer can be expressed as the sum of three odd integers.
 - The sum of any three consecutive integers is divisible by 3.
 - The sum of any four consecutive integers is divisible by 4.
 - The product of any three consecutive integers is divisible by 6.
 - $a, b \in \mathbb{Z}$. If $a \mid b$ and $b \mid a$, then $a = b$.
- The English mathematician Augustus De Morgan died in 1871. He once made the claim: 'I turned x years of age in the year x^2 '
 - Find the year he was born.
 - You have a friend who satisfies the same claim. How old would your friend have been in 2018? Justify that you are correct.

Solució: *aquí*

Llegeix 1.5 del SH.

(Aquests quizzes són el problema 3 de les pàgines anteriors)

QUIZZ

Sigui $A(x) : 2x + 5 > 13$ i $B(x) : x \geq 0$. Tria la correcta:

== $A(x)$ és CN per $B(x)$

= $A(x)$ és CS, per $B(x)$

= $A(x)$ és CN i CS per $B(x)$?

QUIZZ

Igual pregunta amb $A(x) : x \geq 50$ i $B(x) : x \geq 0$.

QUIZZ

Igual pregunta amb $A(x) : x \geq 0$ i $B(x) : x \geq 4$.

QUIZZ

En el llenguatge de la teoria de conjunts, $A \Rightarrow B$ equival a

== $A \subset B$.

$= B \subset A$
 $= A \in B$
 $= A \cap B$

4.0.5 Video sobre implicació i negació

Khan Academy: [Conditional statements and deductive reasoning](#) (4min)

En aquest video t'han explicat que $p \Rightarrow q$ és equivalent a $\neg q \Rightarrow \neg p$.

Després de veure el video, se'ls plantegen exercicis tipus La proposició "Si mires la tele perds el temps" és equivalent a la proposició "Si aprofites el temps, no mires la tele" o és equivalent a "Si no mires la tele, perds el temps"

4.0.6 Video sobre proposicions condicionals i veritat

Khan Academy: [Understanding Logical Statements 1](#) (4min)

QUIZZ

En una proposició condicional hi ha dos termes: l'antecedent i el conseqüent. En la proposició "Si les vaques volen, jo sóc Buda",

= no hi ha antecedent perquè la proposició és falsa

= l'antecedent és "jo sóc Buda"

= L'antecedent 'es "Si les vaques volen" = el conseqüent és "jo no sóc Buda"

QUIZZ

la proposició "Si les vaques volen, jo sóc Buda",

= és falsa perquè les vaques no volen

= és falsa perquè jo no sóc Buda

=és falsa si la diu Buda

= és veritable

Per reforçar la idea que una implicació és falsa només quan l'antecedent ho és i el conseqüent no:

QUIZZ

Tenim una llista de persones (amb inicials o amb noms propis) i la seva categoria professional a l'empresa (directiu=D / treballador=T, o desconegut=X).

A: La Maria és X

B: S. és D

C: En Joan és X

D: L. és T

Si volem demostrar que "Totes les dones són treballadores", quines dades de la llista hem d'aclarir com a mínim:

= A,B,C i D (Resposta incorrecta: No importa saber si en Joan és o no D)

= C i D (Resposta incorrecta: No importa saber si en Joan és o no D, tampoc cal saber si L és dona o home)

= No es pot saber ni aclarint totes les dades (Resposta incorrecta, només cal saber que S. no és dona)

== la B (Resposta correcta)

I variants... amb "Cap dona és directiva", etc...

4.0.7 Conjuncions, disjuncions i negació

QUIZZ

La negació de "Plou i fa sol" és

= No plou i no fa sol

= Ni plou ni fa sol

== No plou o no fa sol

= Plou però no fa sol

4.0.8 Demostracions senzilles

Una demostració o prova matemàtica és una cadena de raonaments en la que cada afirmació és condició necessària de l'anterior. El punt de partida d'una demostració és o bé les definicions dels termes que intervenen, o alguna propietat que ja es coneix.

Llegeix la pàgina 204-205 del IB-HL-An&App. Has entès la demostració de l'exemple 5.1? Comprovem-ho. Hauries de ser capaç d'escriure la demostració que la suma d'un nombre senar i un parell és senar. Porta-la al seminari per si te la demanen.

Idem per: El producte de dos nombres senars és senar.

Idem per: Si $n \geq 2$, $n! + 2$ és parell. (Recorda que $n!$ es defineix com el producte dels nombres $1, 2, \dots, n$.)

És cert que la suma de tres enters consecutius és divisible per 3? És certa la afirmació per quatre? La teva resposta ha de ser o una prova o un contraexemple.

Molt bé, però alerta amb les demostracions, TOTS els passos han de ser correctes, si no, es pot arribar a qualsevol conclusió. Vegeu si no aquest video: [Proof that 1 = 2, by John Hush](#)

4.0.9 $\sqrt{2}$ és irracional

Què vol dir irracional? Mira't el video (8m) de la Kahn Academy: https://www.youtube.com/watch?v=mX91_3GQqLY

Que perquè això és important? Mira't aquest altre (5m) de Hotel Infinity: <https://www.youtube.com/watch?v=nT4geKdKVfw>

Has entès la demostració?

Quiz: Què vol dir demostrar P per contradicció?

= Vol dir que hem de trobar dues afirmacions contradictòries a partir de P

= Vol dir que el que volem demostrar és contradictori

= Vol dir que a partir de la negació de P hem de demostrar-ho

= Vol dir que partint de la negació de P hem de arribar a una contradicció.

Pots demostrar que $\sqrt{3}$ és irracional? Escriu la demostració i porta-la a classe per si te la demanen.

5 Llista d'exercicis

5.0.1 Petites demostracions

1. Demostra que si $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$, llavors un dels dos x o y ha de ser zero.
2. Demostra que la suma de 5 nombres enters consecutius és divisible per 5.
3. Demostra que per $n \in \mathbb{Z}$, $5n + 3$ és parell si $7n - 2$ és senar.
4. Demostra que $A \cap B \subset B$ per qualsevol conjunts A, B .
5. Demostra que si A, B són conjunts qualssevol, $A \subset A \cup B$.
6. Demostra que si A, B són conjunts qualssevol, $A \cap B \subset A \cup B$.
7. Si A és l'interval $(0, 2)$ de la recta real, quin és el conjunt $A^c \cap (1, 10)$?

5.0.2 Eficiència Pareto

En el llibre de text de Introducció a la Microeconomia que esteu estudiant trobem, a [5.8.1 La curva de eficiència de Pareto](#) la següent definició: *Una assignació factible es eficiente en términos de Pareto si no existe una asignación dominante en términos de Pareto: es decir, nadie puede mejorar sin empeorar la situación de otro.*

Llegeix altre cop el capítol si no tens clar què vol dir la eficiència en termes Pareto.

Posem el cas que més de dos agents intervenen.

Digues si les següents definicions alternatives serien o no correctes:

= Una assignació és Pareto eficient si en canviar a una altra assignació algun agent millora més que els altres. SI/NO

= Una assignació és Pareto eficient si en canviar a una altra assignació ningú millora SI/NO

= Una assignació és Pareto eficient si en canviar a una altra assignació només un millora i els altres no SI/NO

Posem el cas que hi ha dos agents A_1, A_2 i definim les proposicions $P_i : A_i \text{ millora}$. Suposem que estem en una situació Pareto eficient,

== Si P_1 , llavors $\neg P_2$ SI/NO

Llavors: (digues si són o no veritat les següents afirmacions)

== Si P_1 , llavors $\neg P_2$ SI/NO

= Si $\neg P_1$ llavors P_2 SI/NO

== Si $P_1 \wedge P_2$ llavors $0 = 1$ SI/NO

== És possible que $P_1 \vee P_2$ SI/NO

Posem ara que estem en una situació no eficient en termes de Pareto i canviem a una nova assignació. Llavors: (digues si són o no veritat les següents afirmacions)

= Si P_1 , llavors $\neg P_2$ SI/NO

== És possible que $P_1 \vee P_2$ SI/NO

= Si $\neg P_1$ llavors P_2 SI/NO

6 Suplements avançats

IB-HL-An&App

- 5. Proofs
- 5.3 Indirect proofs
- 5.4 Mathematical induction

Els qüestionaris del MathCenter: Boolean algebra <http://www.mathcentre.ac.uk:8081/mathseg/>

Colecció de videos molt completa sobre Set Theory: The Trev Tutor

7 Exercicis per exàmens

1. Demuestra que $\sqrt{5}$ és irracional. Caldrà fer servir que si a^2 és múltiple de 5, a també ho ha de ser.
2. Demuestra que la suma de sis enters consecutius és divisible per tres.
3. Si $A = (0, 10)$ i $B = (-5, 5)$, quin interval correspon a $A^c \cap B$