

Problemas

1 ¿Cuáles de los siguientes números son naturales, enteros, o racionales?

- (a) 3,1415926 (b) $\sqrt{\frac{9}{2} - \frac{1}{2}}$ (c) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ (d) $3\pi - \frac{1}{4}$

2 ¿Cuáles de los enunciados siguientes son correctos?

- (a) 1.996 es un número natural. (b) -5 está a la derecha de -3 en la recta numérica.
 (c) -13 es un número natural. (d) No hay ningún número natural que no sea racional.
 (e) 3,1415 no es racional. (f) La suma de dos números irracionales es irracional.

3 ¿Para qué números reales x está definida cada una de las expresiones siguientes?

- (a) $\frac{3}{x-4}$ (b) $\frac{x-1}{x(x+2)}$ (c) $\frac{3x}{x^2+4x-5}$ (d) $\frac{1/4}{x^2+4x+4}$

4 Resolver en y las desigualdades siguientes, en términos de la(s) otra(s) variable(s):

- (a) $3x + 4y \leq 12$ (b) $-x + 3y - z > y - (x - y) + \frac{1}{2}z$ (c) $px + qy \leq m \quad (q > 0)$

5 Considérese el Problema 1(c) de la Sección 1.3. Encontrar una desigualdad que determine cuántas unidades x debe producir la compañía antes de que el coste medio caiga por debajo de q dólares. Resuélvase la desigualdad en x . Tómese $F = 100.000$, $c = 120$, $q = 160$, y resuélvase el problema en este caso.

6 Calcular $|2x - 3|$, para $x = 0$, $1/2$ y $7/2$.

- 7 (a) Calcular $|5 - 3x|$, para $x = -1$, 2 y 4 .
 (b) Resolver la ecuación $|5 - 3x| = 0$.
 (c) Escribir de otra forma $|5 - 3x|$ usando (1.2).

8 Determinar x de forma que

- (a) $|3 - 2x| = 5$ (b) $|x| \leq 2$ (c) $|x - 2| \leq 1$
 (d) $|3 - 8x| \leq 5$ (e) $|x| > \sqrt{2}$ (f) $|x^2 - 2| \leq 1$

9 Hay que cortar una varilla de hierro de 5 metros de longitud. Se necesita que la longitud no se desvíe más de 1 mm de lo planeado. Escribir una especificación para la longitud x de la varilla en metros: (a) usando una doble desigualdad y (b) usando el símbolo de valor absoluto.

1.5 ALGUNOS ASPECTOS DE LÓGICA

Un astrónomo, un físico y un matemático viajaban en un tren por Escocia. Vieron por la ventana un rebaño de ovejas que pastaban en un prado. El astrónomo observó: "En Escocia todas las ovejas son negras." El físico protestó: "Algunas ovejas de Escocia son negras." El matemático declaró: "En Escocia existe un rebaño de ovejas, todas las cuales son negras al menos de un lado."

Hemos puesto de relieve el papel de los modelos matemáticos en las ciencias empíricas, especialmente en economía. Cuanto más complicados son los fenómenos que hay que describir, más importante es ser exactos. Los errores en modelos aplicados a situaciones prácticas pueden tener consecuencias catastróficas. Por ejemplo, en los primeros estadios del programa espacial americano hubo

que destruir un misil valorado en varios millones de dólares, segundos después de su lanzamiento, solamente porque faltaba un punto y coma en el programa de computador diseñado para guiarlo.

Aunque las consecuencias pueden ser menos dramáticas, aparecen fácilmente errores en el razonamiento matemático. Vamos a dar un ejemplo de cómo un estudiante (o un profesor) puede usar un razonamiento incorrecto y así obtener una respuesta errónea a un problema.

Ejemplo 1.6

Hallar una solución de la ecuación $x + 2 = \sqrt{4 - x}$.

“Solución”: Elevando al cuadrado ambos miembros se obtiene $(x + 2)^2 = (\sqrt{4 - x})^2$, y así $x^2 + 4x + 4 = 4 - x$. Reordenando se tiene $x^2 + 5x = 0$. Simplificando por x queda $x + 5 = 0$, luego $x = -5$.

Según este razonamiento, la respuesta debe ser $x = -5$; comprobémoslo. Para $x = -5$ tenemos $x + 2 = -3$. Pero $\sqrt{4 - x} = \sqrt{9} = 3$, luego la respuesta es incorrecta. En el ejemplo 1.9 explicaremos dónde está el error. (Nótese que es prudente comprobar la respuesta al resolver una ecuación.)

Este ejemplo pone de relieve los peligros del cálculo rutinario sin una reflexión adecuada. Puede ser más fácil evitar errores semejantes después de estudiar la estructura del razonamiento lógico.

Proposiciones

Las afirmaciones que son ciertas o falsas se llaman enunciados o **proposiciones**. La mayor parte de las proposiciones de este libro son matemáticas, pero otras pueden provenir de la vida diaria. “Todos los individuos que respiran están vivos” es un ejemplo de una proposición cierta, mientras que “todos los individuos que respiran están sanos” es un ejemplo de una proposición falsa. Nótese que si las palabras que se usan para expresar estas afirmaciones carecen de sentido preciso, será a menudo difícil distinguir entre una proposición verdadera y una falsa.

Supongamos que una afirmación tal como “ $x^2 - 1 = 0$ ” incluye una o más variables. Sustituyendo la variable x por varios números reales, podemos generar muchas proposiciones diferentes, algunas ciertas y otras falsas. Por esta razón decimos que la afirmación es una **proposición abierta**. De hecho, la proposición $x^2 - 1 = 0$ es cierta si $x = 1$ ó -1 , pero es falsa en cualquier otro caso. Así, una proposición abierta no es simplemente verdadera o falsa. No es ni lo uno ni lo otro hasta que no elegimos un valor particular de la variable. En la práctica descuidamos un poco el distinguir una proposición de una proposición abierta: llamamos proposiciones a los dos tipos.

Implicaciones

Para llevar el control de cada paso de un razonamiento lógico es práctico usar las flechas de implicación.

Supongamos que P y Q son dos proposiciones tales que, cuando P es cierta, Q lo es necesariamente. En este caso escribimos

$$P \Rightarrow Q \quad (*)$$

que se lee “ P implica Q ”, o “si P , entonces Q ”, o “ Q es consecuencia de P ”. El símbolo $\Rightarrow$ es una **flecha de implicación**, y apunta a la dirección de la implicación lógica. Damos algunos ejemplos de implicaciones verdaderas.

Ejemplo 1.7

- (a) $x > 2 \implies x^2 > 4$.
 (b) $xy = 0 \implies x = 0 \text{ ó } y = 0$.
 (c) $x \text{ es un cuadrado} \implies x \text{ es un rectángulo}$.
 (d) $x \text{ es una persona sana} \implies x \text{ respira}$.

Nótese que la palabra “o” significa en matemáticas el “o inclusivo”, lo que quiere decir que “ P ó Q ” significa “o P , o Q , o ambas”.

Todas las proposiciones del ejemplo 1.7 son proposiciones abiertas, como la mayoría de las que encontramos en matemáticas. Una implicación $P \implies Q$ significa que, para cada valor de una variable para el que P es verdadera, Q lo es también.

En algunos casos en que la implicación (*) es válida, puede deducirse la conclusión lógica en la otra dirección:

$$Q \implies P$$

En estos casos, podemos escribir ambas implicaciones juntas en una única **equivalencia lógica**:

$$P \iff Q$$

En este caso decimos que “ P es equivalente a Q ”, o “ P si y sólo si Q .” Nótese que el enunciado “ P sólo si Q ” expresa la implicación $P \implies Q$, mientras que “ P si Q ” expresa $Q \implies P$.

El símbolo $\iff$ es una **flecha de equivalencia**. En el ejemplo 1.7 anterior vemos que se puede sustituir la implicación de (b) por una equivalencia, porque también es cierto que $x = 0$ ó $y = 0$ implica $xy = 0$. Nótese que no se puede sustituir ninguna otra implicación de ese ejemplo por una equivalencia. En efecto, de que x^2 sea mayor que 4 no se deduce que x sea mayor que 2 (por ejemplo $x = -3$). Asimismo, un rectángulo no tiene por qué ser un cuadrado. Finalmente, el hecho de que una persona x respire no significa que esté sana.

Condiciones necesarias y suficientes

Hay otras maneras que se usan frecuentemente para expresar que la proposición P implica la proposición Q , o que P es equivalente a Q . Así, si P implica Q , decimos que P es una “condición suficiente” para Q . Después de todo, para que Q sea verdadera, es suficiente que P lo sea. De manera análoga, sabemos que si P se verifica, entonces es cierto que Q también se verifica. En este caso decimos que Q es una “condición necesaria” para P . De hecho, Q debe ser necesariamente cierta si P lo es. Por tanto,

P es una **condición suficiente** para Q significa: $P \implies Q$

Q es una **condición necesaria** para P significa: $P \implies Q$

Por ejemplo, si formulamos la implicación del ejemplo 1.7 (c) en este lenguaje, se tendría:

Una condición necesaria para que x sea un cuadrado es que x sea un rectángulo.

o

Una condición suficiente para que x sea un rectángulo es que x sea un cuadrado.

La expresión verbal correspondiente a $P \iff Q$ es: P es una **condición necesaria y suficiente** para Q , o P si y sólo si Q . De lo anterior resulta evidente que es muy importante distinguir entre las pro-

posiciones “ P es una condición necesaria para Q ” (que significa $Q \implies P$) y “ P es una condición suficiente para Q ” (que significa $P \implies Q$). Para poner de relieve la cuestión, considérense las dos proposiciones siguientes:

1. Respirar es una condición necesaria para que una persona esté sana.
2. Respirar es una condición suficiente para que una persona esté sana.

Evidentemente la proposición 1 es cierta. En cambio, la 2 es falsa porque un enfermo (vivo) respira. En las páginas siguientes incluiremos una y otra vez condiciones necesarias y suficientes. El entenderlas y entender las diferencias entre ellas es una condición necesaria para comprender el análisis económico. Desgraciadamente no es una condición suficiente.

Resolución de ecuaciones

Damos ahora unos ejemplos de cómo el uso de flechas de implicación y equivalencia puede ayudar a evitar errores al resolver ecuaciones como la del ejemplo 1.6.

Ejemplo 1.8

Hallar todos los x tales que $(2x - 1)^2 - 3x^2 = 2(\frac{1}{2} - 4x)$.

Solución: Desarrollando ambos miembros obtenemos una nueva ecuación que tiene, evidentemente, las mismas soluciones que la dada:

$$(2x - 1)^2 - 3x^2 = 2(\frac{1}{2} - 4x) \iff 4x^2 - 4x + 1 - 3x^2 = 1 - 8x$$

Sumando $8x - 1$ a ambos lados de la segunda igualdad y reduciendo términos semejantes se obtiene la expresión equivalente

$$4x^2 - 4x + 1 - 3x^2 = 1 - 8x \iff x^2 + 4x = 0$$

Ahora bien, $x^2 + 4x = x(x + 4)$, y el segundo miembro es 0 si y sólo si $x = 0$ ó $x + 4 = 0$. Esto es,

$$x^2 + 4x = 0 \iff x(x + 4) = 0 \iff x = 0 \text{ ó } x + 4 = 0 \iff x = 0 \text{ ó } x = -4$$

Resumiendo, hemos construido una cadena de equivalencias que prueba que la ecuación dada se satisface para los dos valores $x = 0$ y $x = -4$, y sólo para ellos. Esto es,

$$(2x - 1)^2 - 3x^2 = 2(\frac{1}{2} - 4x) \iff x = 0 \text{ ó } x = -4$$

Ejemplo 1.9

Hallar todos los x tales que $x + 2 = \sqrt{4 - x}$ (véase Ejemplo 1.6).

Solución: Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación se obtiene

$$(x + 2)^2 = (\sqrt{4 - x})^2$$

Consecuentemente, $x^2 + 4x + 4 = 4 - x$, esto es, $x^2 + 5x = 0$. De la última ecuación se deduce que

$$x(x + 5) = 0$$

lo que implica que $x = 0$ ó $x = -5$. Así, una condición necesaria para que x sea una raíz de $x + 2 = \sqrt{4 - x}$ es que $x = 0$ ó $x = -5$. Sustituyendo x en la ecuación dada por cada uno de los dos valores posibles se ve que sólo $x = 0$ verifica la ecuación. Así la ecuación tiene una única solución, que es $x = 0$.

Al buscar la solución al Ejemplo 1.9, ¿por qué era necesario comprobar si los valores que hallábamos daban soluciones, mientras que este paso no era necesario en el Ejemplo 1.8? Para responder a esto debemos analizar la estructura lógica de nuestra solución al Ejemplo 1.9. Ayudándonos con flechas numeradas de implicación y equivalencia, podemos expresar la solución anterior así:

$$\begin{aligned} x + 2 = \sqrt{4 - x} &\stackrel{(1)}{\implies} (x + 2)^2 = 4 - x \stackrel{(2)}{\implies} x^2 + 4x + 4 = 4 - x \stackrel{(3)}{\implies} x^2 + 5x = 0 \\ &\stackrel{(4)}{\implies} x(x + 5) = 0 \stackrel{(5)}{\implies} x = 0 \text{ ó } x = -5 \end{aligned}$$

La implicación (1) es cierta (porque $a = b \implies a^2 = b^2$ y $(\sqrt{a})^2 = a$). Es importante observar que no se puede sustituir esta implicación por una equivalencia. Si $a^2 = b^2$ entonces, bien $a = b$ ó $a = -b$; no es necesariamente cierto que $a = b$. Las implicaciones (2), (3), (4) y (5) son también ciertas; más aún, todas ellas son equivalencias, aunque esto no sea necesario para hallar la solución. Hemos obtenido, por tanto, una cadena de implicaciones que van de la ecuación $x + 2 = \sqrt{4 - x}$ a la proposición " $x = 0$ ó $x = -5$ ". Puesto que la implicación (1) no se puede invertir, no hay una cadena de implicaciones en la dirección opuesta. Así hemos comprobado que si el número x verifica $x + 2 = \sqrt{4 - x}$, entonces x debe ser 0 ó -5 ; ningún otro valor puede verificar la ecuación dada. Sin embargo, aún no hemos probado que 0 ó -5 verifiquen realmente la ecuación. Hasta que no sustituyamos, en la ecuación, x por 0 y -5 , no podremos ver que solamente $x = 0$ es una solución. Nótese que, en este caso, el test que hemos propuesto no sólo sirve para comprobar nuestros cálculos, sino también su necesidad lógica.

Volviendo al Ejemplo 1.6, vemos ahora que cometimos dos errores. En primer lugar, la implicación $x^2 + 5x = 0 \implies x + 5 = 0$ es falsa porque $x = 0$ es también una solución de $x^2 + 5x = 0$. En segundo lugar, es lógicamente necesario comprobar si 0 ó -5 verifican realmente la ecuación.

El método que hemos usado para resolver el Ejemplo 1.9 es el más común. Se establece una cadena de implicaciones que comienza en la ecuación dada y acaba en un conjunto de soluciones posibles de ella. Comprobando cada una de estas soluciones encontramos cuáles verifican realmente la ecuación. Aun si la cadena de implicaciones es una cadena de equivalencias (como en el Ejemplo 1.8), esta comprobación es un test útil de la validez, no sólo de los cálculos, sino de la lógica.

Problemas

- Las implicaciones y equivalencias se pueden expresar de formas que difieren de las ya mencionadas. Usar flechas de implicación o equivalencia para marcar en qué dirección cree el lector que van las conclusiones lógicas en las siguientes proposiciones:
 - La ecuación $2x - 4 = 2$ se verifica sólo cuando $x = 3$.
 - Si $x = 3$, entonces $2x - 4 = 2$.
 - La ecuación $x^2 - 2x + 1 = 0$ se satisface si $x = 1$.
 - Si $x^2 > 4$, entonces $x > 2$ ó $x < -2$ y recíprocamente.
- Considérense las seis implicaciones siguientes y decídase en cada caso: (i) si la implicación es cierta y (ii) si la implicación contraria es cierta. (x, y, z son números reales.)

(a) $x = 2$ e $y = 5 \implies x + y = 7$	(b) $(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0 \implies x = 1$
(c) $x^2 + y^2 = 0 \implies x = 0$ ó $y = 0$	(d) $x = 0$ e $y = 0 \implies x^2 + y^2 = 0$
(e) $xy = xz \implies y = z$	(f) $x > y^2 \implies x > 0$
- Considérese la proposición $2x + 5 \geq 13$.
 - ¿Es $x \geq 0$ una condición necesaria, suficiente, o necesaria y suficiente para que la proposición sea cierta?

(b) Responder a la misma pregunta cuando se sustituye $x \geq 0$ por $x \geq 50$.

(c) Responder a la misma pregunta cuando se sustituye $x \geq 0$ por $x \geq 4$.

4 Resolver la ecuación

$$\frac{(x+1)^2}{x(x-1)} + \frac{(x-1)^2}{x(x+1)} - 2\frac{3x+1}{x^2-1} = 0$$

5 Resolver las siguientes ecuaciones:

(a) $x+2 = \sqrt{4x+13}$

(b) $|x+2| = \sqrt{4-x}$

(c) $x^2 - 2|x| - 3 = 0$

6 Resolver las siguientes ecuaciones:

(a) $\sqrt{x-4} = \sqrt{x+5} - 9$

(b) $\sqrt{x-4} = 9 - \sqrt{x+5}$

7 Rellenar las casillas con “sí y sólo sí” cuando el resultado sea un enunciado cierto o, en otro caso, con “sí” o “sólo sí.”

(a) $x = \sqrt{4}$ $x = 2$

(b) $x^2 > 0$ $x > 0$

(c) $x^2 < 9$ $x < 3$

(d) $x(x^2+1) = 0$ $x = 0$

(e) $x(x+3) < 0$ $x > -3$

8 Considérese el siguiente intento de resolver la ecuación $x + \sqrt{x+4} = 2$:

“De la ecuación dada se deduce que $\sqrt{x+4} = 2 - x$. Elevando al cuadrado ambos miembros se obtiene $x+4 = 4 - 4x + x^2$. Después de simplificar se ve que esta ecuación implica que $x^2 - 5x = 0$. Cancelando x , obtenemos $x - 5 = 0$ y esta ecuación se verifica cuando $x = 5$.”

(a) Escribir en forma de flechas las implicaciones o equivalencias del razonamiento anterior. ¿Cuáles son correctas?

(b) Resolver correctamente la ecuación.

9 Enunciar la negación de cada una de las 6 proposiciones siguientes, de la forma más simple posible.

(a) $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

(b) Todo x verifica $x \geq a$.

(c) Ni x ni y es menor que 5.

(d) Para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que se verifica B .

(e) Nadie puede evitar que le gusten los gatos.

(f) Cada uno ama a alguien algunas veces.

10 “El Tribunal Supremo no admite a trámite el recurso a una decisión de un tribunal inferior, en la que se aprueba el rechazo de un juez a permitir que un acusado se niegue a hablar”. ¿Tiene el acusado derecho a negarse a hablar?