

Funcions, equacions, inequacions

Projecte Math21, Departament Economia i Empresa, UPF

25 de març de 2021

Índex

1 Objectius d'aprenentatge	1
2 Prerequisits	2
3 Guia pel professor	2
3.1 Presentació del tema	2
3.2 Materials bàsics	2
4 Activitats autònomes	2
4.0.1 Fer gràfiques amb l'ordinador	2
4.0.2 Completar el quadrat amb Geogebra	3
4.0.3 Desigualtats lineals	5
4.0.4 Programació lineal: enfocament gràfic	5
5 Llista d'exercicis	5
5.0.1 Exerc-complQuad	5
5.0.2 Exerc-complQuad	5
6 Suplements avançats	5
7 Exercicis per exàmens	5
7.0.1 Troba la transformació	5

Aquest és un document de treball INTERN, en fase de discussió i molt preliminar. No en feu difusió, sisplau.

([Enllaç al document principal](#))
([Enllaç a la versió pdf d'aquest document](#))
([Enllaç a la font LaTeX](#))
([Enllaç als fitxers de les figures](#))

1 Objectius d'aprenentatge

- Concepte de funció, domini, recorregut, gràfica
- Funcions lineals, equació de la recta, intersecció de rectes, equacions i inequacions lineals
- Elements de programació lineal

- La funció valor absolut, la funció $f(x) = |x|/x$
- Funcions quadràtiques, paràboles, completar el quadrat, desplaçament de $y = x^2$.
- Transformacions de gràfiques: reflexions en els eixos, translacions, canvis d'escala en els eixos
- Ús de geogebra o eines equivalents en aquests ítems

2 Prerequisits

- Arrel quadrada, regles de potenciació
- L'àlgebra elemental de resolució d'equacions lineals o de segon ordre
- Les beceroles de geogebra

3 Guia pel professor

3.1 Presentació del tema

3.2 Materials bàsics

Les transparències d'Àngel Gil [Guia 1. Introducció. Funcions](#)

Pels Elements de programació lineal, la secció 2.3 del PermRau.

Capítol 2 Functions de IB-HL-MATH-An&Appr. També Capítol 2 Functions de IB-HL-MATH-Appl&Interp.

4 Activitats autònomes

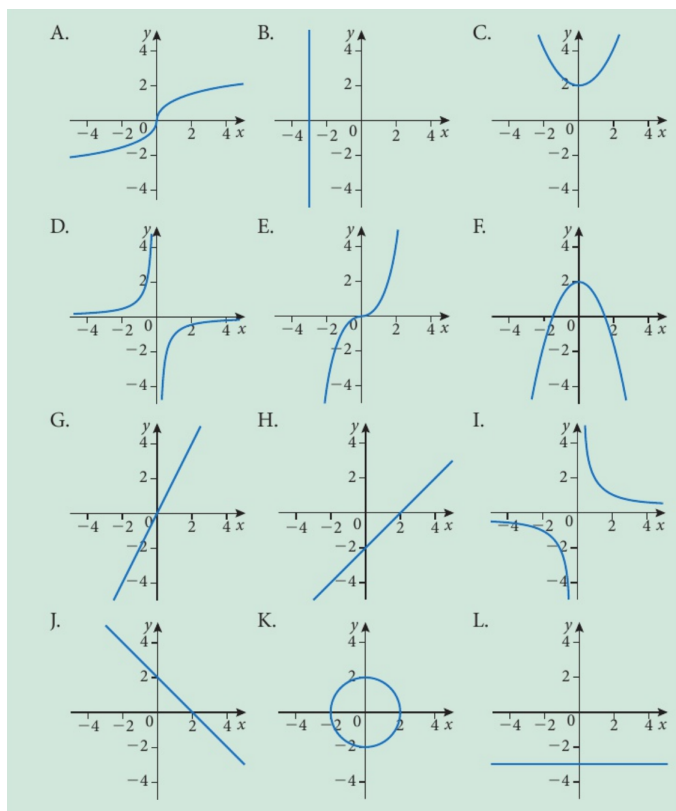
4.0.1 Fer gràfiques amb l'ordinador

Amb Geogebra és fàcil, només escriure la definició, per exemple $f(x)=abs(x)$ o bé directament $f(x)=|x|$, ja apareix el seu gràfic a la finestra gràfica. Després podem decidir si volem veure'l o no amb el botnoet de color de l'esquerra, i podem canviar-ne alguns comportament amb la opció *Configurar* del menú $\vdots$ de la seva dreta.

Amb WolframAlpha, també és fàcil: escrivim `plot abs(x), {x,-1,1}` i si no volem dir els límits de l'eix x podem ometre la segona part.

Amb **R** cal que la funció tingui un nom, i la variable independent no la donem. Si cal, haurem primer de definir la funció i donar-li un nom. Prova aquestes comandes:

```
plot.function(abs, from=-2, to=2)
# podem definir el color o el gruix de la línia
plot.function(abs, from=-2, to=2, col='red', lwd=3)
# definim una funcio amb el nom i la variable independent que mes ens agradi
la_meva_funcio = function(h) 2-abs(h)
# i la dibuixem sobreposada amb la anterior
plot.function(la_meva_funcio, from = -2, to=2, add = TRUE)
```



Practica una mica, hauries de ser capaç de reproduir aquests gràfics amb qualsevol dels paquets de software comentats.

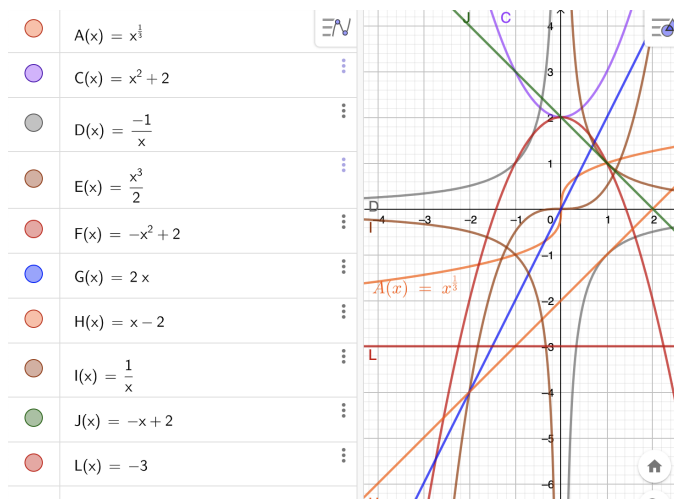
QUIZZ

Fes correspondre a cada gràfica una de les definicions de sota i digues quines són les gràfiques que no poden correspondre a una funció. De fet, hi ha dues d'aquestes gràfiques que no poden ser la gràfica d'una funció, quines són?

-3	$2x$	$-1/x$	$x^{1/3}$
$-x+2$	$-x^2+2$	x^2+2	$x^3/2$
$x-2$	$1/x$		

Solució: B: $x = -3$, K: $x^2 + y^2 = \sqrt{4}$ no són funcions.

Solució:



4.0.2 Completar el quadrat amb Geogebra

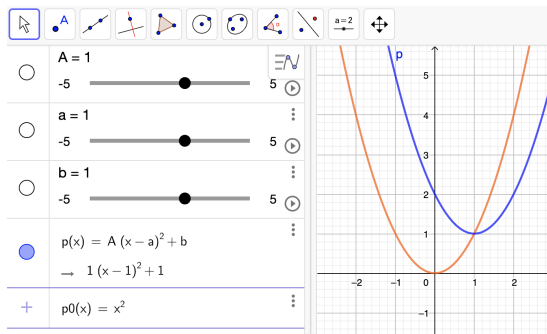
Aquest és un cas clar de tema que no es toca a classe, ni potser al seminari, se'ls fa treballar autònomament, se'ls pot preguntar als seminaris si ho han fet, i pot sortir a un examen tipus pregunta curta..

Per interpretar correctament un polinomi quadràtic com ara $p(x) = x^2 + 3x - 1$ és molt còmode competir el quadrat, és a dir escriure'l en la forma $p(x) = (x - a)^2 + b$. Això ho podem fer pas per pas així:

$$x^2 + 3x - 1 = (x - a)^2 + b \Rightarrow a = -3/2, x^2 + 3x - 1 = (x - \frac{3}{2})^2 + b \Rightarrow b = -(3/2)^2 - 1 = -13/4$$

i per tant $p(x) = x^2 + 3x - 1 = (x - 3/2)^2 - 13/4$

Podem entrar en Geogebra directament $p(x) = A(x - a)^2 + b$ i se'ns creen variables A, a, b de manera que després podem veure l'efecte de fer variar els seus valors. També podem posar $p_0(x) = x^2$ per tenir la referència de la paràbola estàndard. Fixa't que per Geogebra A i a són variables diferents.



Fes-ho i contesta:

QUIZZ

Quan fem variar a la paràbola $p(x)$ es desplaça verticalment SI/NO

Quan fem variar b , la paràbola $p(x)$ es desplaça verticalment SI/NO

Si $a > 0$ la paràbola $p(x)$ s'ha desplaçat a la dreta respecte la p_0 SI/NO

Si $A < 0$ la paràbola té les banyes cap avall SI/NO

Si $A = 0$ la paràbola sempre està a la part positiva de l'eix vertical SI/NO

Mantenim $A = 1$ i fem variar b . Llavors, la paràbola $p(x)$ té dos zeros si i només si $b < 0$ SI/NO

QUIZZ

Observant que $p(x) = x^2 + 3x - 1 = (x - 3/2)^2 - 13/4$, es pot deduir que

$$= p(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{13/4} + 3$$

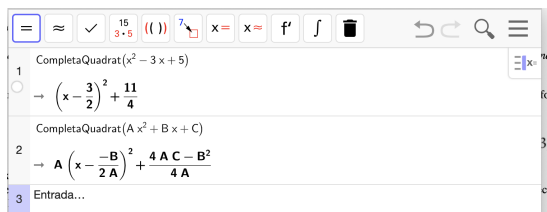
$$= p(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm (13/4)^2 + 3$$

$$= p(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{13/4} - 3$$

= cap de les anteriors

De fet, Geogebra ens pot fer la compleció del quadrat automàticament. Asseguraeu-vos que esteu en la finestra CAS de Geogebra (CAS vol dir Computer Algebra System, Sistema de computació algebàrica, algunes versions de Geogebra en diuen directament la *Finestra Algebraica*). A la finestra CAS les lletres es tracten com a símbols que poden representar nombres però que no tenen un valor fix, tal com ho fem en l'àlgebra habitual.

Llavors podreu provar coses com això



4.0.3 Desigualtats lineals

4.0.4 Programació lineal: enfocament gràfic

Es pot repassar el que saben de representació gràfica de rectes i de desigualtats lineals per introduir les idees bàsiques de la programació lineal. Es pot seguir la línia de [PembRau, cap. 2.2 i 2.3, pàgines 26-35](#).

5 Llista d'exercicis

5.0.1 Exerc-complQuad

En el cas que tinguem $p(x) = Ax^2 + Bx + C$, amb $A \neq 1$ per completar el quadrat com hem fet a [4.0.2](#) caldrà primer treure la A com a factor comú: $p(x) = A(x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A})$, i després ja podem procedir com abans.

- (a) Aplica-ho per completar el quadrat de $p(x) = 2x^2 + 3x - 4$
- (b) Aplica-ho en general per $p(x) = Ax^2 + Bx + C$
- (c) Dedueix del que has fet a (b) la manera de trobar els zeros de $p(x)$.

5.0.2 Exerc-complQuad

Hem vist a [4.0.2](#) que en completar el quadrat de $Ax^2 + Bx + C = 0$ obtenim

$$A \left(x - \frac{-B}{2A} \right)^2 + \frac{4AC - B^2}{4A} = 0$$

Aïllant la x d'aquesta darrera expressió, has d'obtenir l'expressió habitual que fem servir per resoldre l'equació de segon grau.

6 Suplements avançats

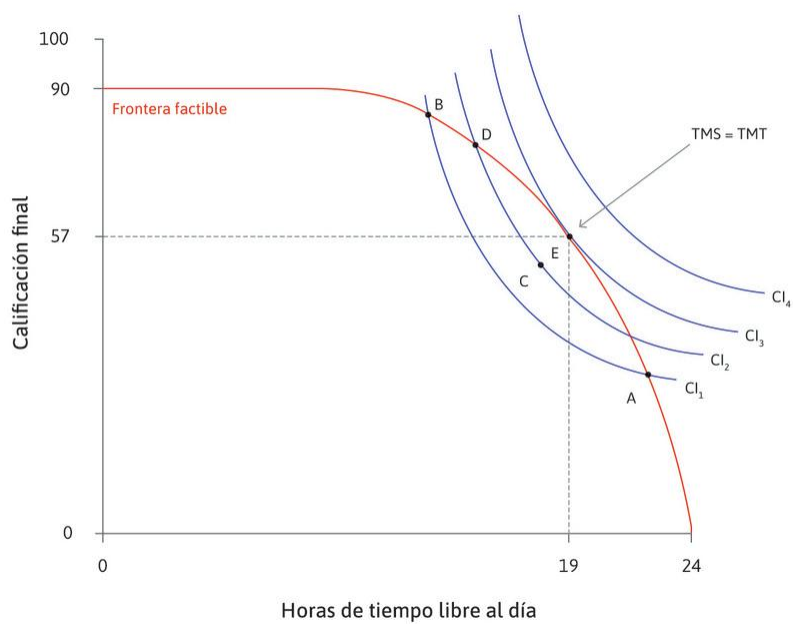
No crec que hi hagi temps de veure gaire cosa de polinomis generals (d'orde més gran de 2). Es pot referir els estudiants avançats a:

1. S&H-MAE: XXX
2. IB-An\$Appr

7 Exercicis per exàmens

7.0.1 Troba la transformació

En el capítol 3.5 *Toma de decisiones y escasez* del llibre de text de Introducció a la Microeconomia apareix aquesta figura on es veu la frontera factible del problema de decisió que s'hi planteja.



Utilitzant una funció del tipus $y = f(t) = A\sqrt{t}$, quina transformació hi podries aplicar per obtenir la frontera factible de la imatge?

Solució: Podem partir de $y = A\sqrt{t}$, canviem el signe a la variable independent per fer una reflexió respecte l'eix vertical i li sumem 24 per desplaçar-la cap a la dreta i fer que el tall amb l'eix horitzontal sigui a $x = 24$. Tenim ara $y = A\sqrt{24 - t}$, per tal que $y(0) = 90$ caldrà prendre $A = 90/\sqrt{24}$