

Límits i continuïtat

Projecte Math21, Departament Economia i Empresa, UPF

25 de març de 2021

Índex

1	Objectius d'aprenentatge	1
2	Prerequisits	2
3	Guia pel professor	2
3.1	Presentació del tema	2
3.2	Materials bàsics	2
4	Activitats autònomes	2
4.0.1	Límits de successions	2
4.0.2	Successions a Geogebra i R	3
4.0.3	Límits de funcions	4
4.0.4	Funcions a trossos	4
4.0.5	Comissions al venedor	6
5	Llista d'exercicis	7
5.0.1	Acabar 4.0.5	7
6	Suplements avançats	7
7	Exercicis per exàmens	7

Aquest és un document de treball INTERN, en fase de discussió i molt preliminar. No en feu difusió, sisplau.

([Enllaç al document principal](#))
([Enllaç a la versió pdf d'aquest document](#))
([Enllaç a la font LaTeX](#))
([Enllaç als fitxers de les figures](#))

1 Objectius d'aprenentatge

- Consolidar el què s'ha vist en els darrers temes sobre les funcions d'una variable
- Introduir la idea de límit d'una successió, sense formalitzar
- Alguns exemples d'aplicació de límit de successions

- Límit d'una funció d'una variable com a límit de $f(x_n)$ per qualsevol successió $x_n \rightarrow \infty$
- Límits i operacions: suma, producte, quocient
- Funció continua, discontinuïtats inifinites, de salt, evitables.
- Exemples de discontinuïtats de salt
- Continuïtat i operacions: composició, suma, producte, quocient

2 Prerequisits

Coneixen la idea de progressió aritmètica i geomètrica. I de la suma de progressions. Si no, poden repassar-ho a IBD-HL-An&App 3.2 i 3.3.

3 Guia pel professor

Encara que introduïm els conceptes de límits de successions i de funcions, no pretenem entrar en el càlcul de límits més enllà de l'enfocament gràfic i dels casos més senzills. Preferim tractar la idea de límit d'una successió, de successió convergent, oscil·lant o divergent i entrar breument a la de subsuccessió, més que no pas el càlcul de límits més enllà dels elementals: potències, exponencials i logaritmes.

3.1 Presentació del tema

Es poden presentar exemples que facin reflexionar sobre la idea d'aproximar-se a un valor sense arribar-hi mai: Aquiles i la tortuga, menjar-se la meitat que queda del pastís, etc.

També exemples de creixement asimptòtic, interès compost, etc.

Es donaran les regles bàsiques de càlcul de límits: suma, diferència, producte i quocient.

Sí que cal que tinguin clar els ordres de creixement: $\log < x^n < \exp$.

Una visió ràpida de la idea de continuïtat, primer a nivell gràfic i després amb límits, límits laterals, etc.

Exemples de funcions definides per trams, IRPF?

3.2 Materials bàsics

S&H-MAE Capítol 6.

IBD-HL-An&App Capítol 3

4 Activitats autònomes

4.0.1 Límits de successions

Per entendre el concepte de límit, és útil començar amb límits de successions. Les successions són

QUIZZ

Exercise 3.1

1. Find the first five terms of each infinite sequence.
- (a) $a_n = 2n - 3$ (b) $b_n = 2^n - 3$
- (c) $c_n = 3(2)^{-n}$ (d) $\begin{cases} d_1 = 5 \\ d_n = d_{n-1} + 3, & \text{for } n > 1 \end{cases}$
- (e) $e_n = (-1)^n(2^n) + 3$ (f) $\begin{cases} f_1 = 3 \\ f_n = f_{n-1} + 2n, & \text{for } n > 1 \end{cases}$
2. Find the first five terms and the 50th term of each infinite sequence.
- (a) $a_n = 2 - 5n$ (b) $b_n = 2 \times 3^{n-1}$
- (c) $u_n = (-1)^{n-1} \frac{2n}{n^2 + 2}$ (d) $a_n = n^{n-1}$
- (e) $a_n = 2a_{n-1} + 5$ and $a_1 = 3$ (f) $u_{n+1} = \frac{3}{2u_n + 1}$ and $u_1 = 0$
- (g) $b_n = 3b_{n-1}$ and $b_1 = 2$ (h) $a_n = a_{n-1} + 2$ and $a_1 = -1$

Exercicis semblants a

4.0.2 Successions a Geogebra i R

Seqüência(<Valor final>)

Seqüência(<Valor inicial>, <Valor final>)

Seqüência(<Valor inicial>, <Valor final>, <increment>)

Seqüência(<Expressió>, <Variable>, <des de>, <fins a>)

Seqüência(<Expressió>, <Variable>, <des de>, <fins a>, <increment>)

Amb Geogebra tenim la comanda **Seqüència** que admet diversos arguments: i que ens permet fer coses com ara:

I1 = Seqüència(3, 10)	:
→ {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}	
I2 = Seqüència(3, 50, 15)	:
→ {3, 18, 33, 48}	
I3 = Seqüència($\left(\frac{n-2}{n+5}, n, 1, 10\right)$)	:
→ {-0.17, 0, 0.13, 0.22, 0.3, 0.36, 0.42, 0.46, 0.5, 0.53}	
I4 = Seqüència($\left(\frac{n-2}{n+5}, n, 1, 500, 25\right)$)	:
→ {-0.17, 0.77, 0.88, 0.91, 0.93, 0.95, 0.96, 0.96, 0.97, 0.97, 0.97, 0.98, 0.98, 0.98, ...}	

Amb R, podem aplicar la majoria d'expressions directament a seqüències de nombres. Primer definim la seqüència amb la funció `seq` o amb la notació abreujada `N:M`.

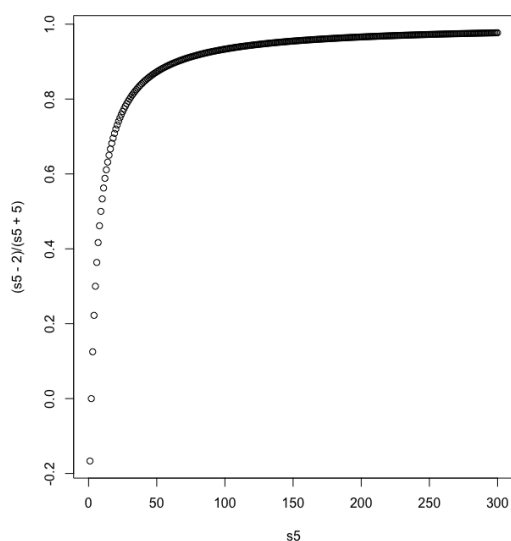
```
> s1 <- 1:10
> s1
[1] 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
> s2 <- seq(1,10)
> s2
[1] 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
> s3 <- seq(from=1, to=50, by= 7)
> s3
[1] 1 8 15 22 29 36 43 50
> s4 <- seq(from=1, to=500, by= 50 )
> s4
[1] 1 51 101 151 201 251 301 351 401 451
```

Un cop tenim la seqüència, podem aplicar-hi el càlcul que vulguem, per exemple, per calcular $(n-2)/(n+5)$

```
> (s2-2)/(s2+5)
[1] -0.1666667 0.0000000 0.1250000 0.2222222 0.3000000 0.3636364 0.4166667 0.4615385
      0.5000000 0.5333333
> (s4-2)/(s4+5)
[1] -0.1666667 0.8750000 0.9339623 0.9551282 0.9660194 0.9726562 0.9771242 0.9803371
      0.9827586 0.9846491
```

I per dibuixar la seqüència, podem fer

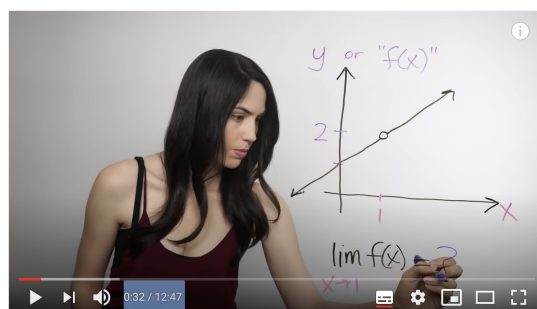
```
s5 = seq(1,300)
plot(x=s5, y=(s5-2)/(s5+5), type="p")
```



per obtenir

Ara et toca a tu:

4.0.3 Límits de funcions



Un video senzill per començar: [Introduction to Limits \(NancyPi\)](#) (12min)

O aquest altre: [Limits and Continuity \(KristaKingMath\)](#) (9min)

QUIZZ

Marca la correcta:

= Per saber el límit de $f(x)$ quan x tendeix a u , cal conèixer el valor de la funció per $x = 1$

= El valor del límit de $f(x)$ quan x tendeix a u no depèn dels valors de x per $x \neq 1$

== El valor del límit de $f(x)$ quan x tendeix a u no depèn del valor de $f(1)$

= Cap de les anteriors

Un video amb una aproximació gràfica al límits [aproximació gràfica al límits](#) (3 min) i un altre als límits laterals:

[Evaluate all the limits from a given graph by Brian McLogan](#) (5 min)

QUIZZ

XXX

Encara un video sobre els límits laterals i l'existència del límit: [How to prove that the limit does not exist \(KristaKingMath\)](#) (6 min)

4.0.4 Funcions a trossos

Hi ha situacions en què el valor de una quantitat (salari) depèn de una altra (vendes realitzades) segons trams en què s'apliquen coeficients diferents.

Comença mirant-te aquest video: [Limite de una función a trozos: Ejercicio Resuelto.](#)

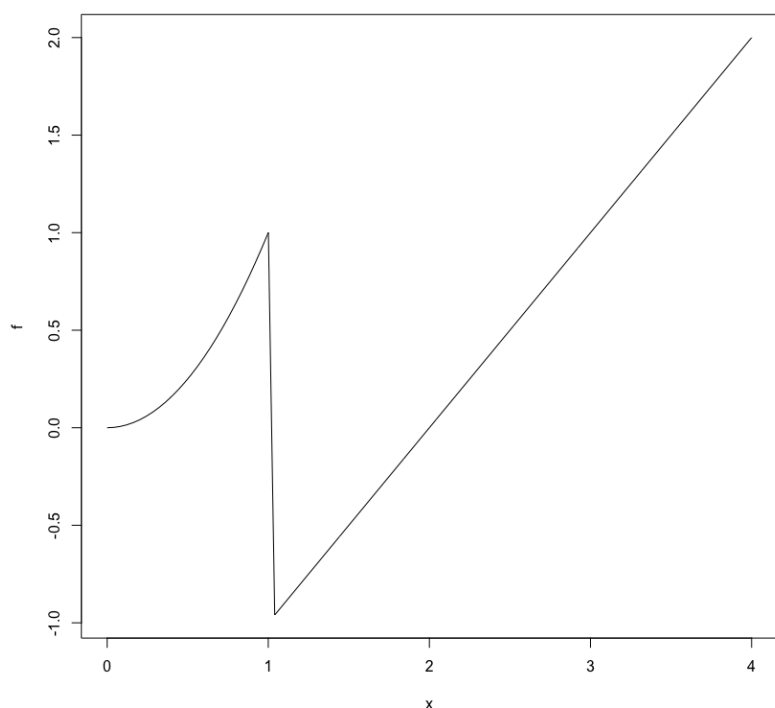
QUIZZ

La funció que apareix al video:
 = és continua
 = té una discontinuïtat evitable
 == té una discontinuïtat de salt
 = cap de les anteriors és veritat.

Vegem com podem representar una tal funció en Geogebra: Caldrà que teclejem $f(x) = \begin{cases} x-2, & x > 1 \\ x^2, & x \leq 1 \end{cases}$. Fes-ho i veuràs la gràfica *trencada* en dos trossos.

En R ho fem de manera similar:

```
f <- function(x) ifelse(x>1, x-2, x^2)
plot.function(f, from=0, to=4)
```



Què passa amb R? No ho sap fer tant bé com Geogebra! Perquè ens dibuixa una vertical en el salt? I a més si t'hi fixes no és ben bé vertical!

De fet, tant R com Geogebra el que fan per dibuixar la gràfica d'una funció és prendre una sèrie de valors de x , calcular els corresponents $f(x)$ i unir els punts obtinguts amb una línia. Geogebra (els seus programadors) pensent més en els estudiants i miren si hi ha algun salt important i eliminen la línia que uneix els punts en el salt. Si volem veure els punts que R ha calculat abans que els uneixi amb la línia, podem demanar `plot.function(f, from=0, to=4, type="p")`, és a dir que volem un gràfic tipus "p", de punts. Fes-ho i veuràs el que ha fet R quan els ha unit. Ara s'entén perquè la vertical no era del tot vertical, oi? Podem demanar a R que calculi molts més punts i llavors el salt serà gairebé vertical: `plot.function(f, from=0, to=4, n=1000)`.

Tornem a Geogebra. Hi ha dues eines interessants: **LímitDreta** i **LímitEsquerra**. Si has definit abans $f(x)$, ara pots demanar `LimitDreta(f,1)` i `LimitEsquerra(f,1)`. Què obtens?

QUIZZ

Entra a Geogebra, amb la Calculadora CAS, la definició de f a trossos com estem dient i respon:

= `LimitDreta(f,2)` i `LimitEsquerra(f,2)` dona valors diferents
 = `LimitDreta(f,1)` i `LimitEsquerra(f,1)` dona valors iguals
 == `LimitDreta(f,1)` i `LimitEsquerra(f,1)` dona valors diferents
 = Cap de les anteriors és veritat.

4.0.5 Comissions al venedor

Un venedor de samarretes cobra una comissió per cada samarreta que ven, però aquesta comissió depèn de la quantitat que n'hagi venut al llarg del mes: si ven menys de 10 samarretes li toca el 1%, si en ven entre 100 i 500 li correspon el 3% del total, i si en ven més de 500 cobrarà el 5% del que hagi venut. El preu de venda de la samarreta és de 10 euros.

Expressa al·gèbricament la funció a trossos $C(v)$ que dona la comissió que li toca al venedor per v samarretes venudes. Dibuixa el seu gràfic amb Geogebra o R.



Una empresa de la competència li ofereix el següent tracte: Fins a 150 samarretes, un 1% de les vendes, entre 150 i 500 samarretes s'hi afegirà un 3% de les que vengui per sobre de 150, i si ven més de 400, hi afegiran un 5% de les que vengui per sobre de 400. Les samarretes d'aquesta empresa es venen per 12 euros.

Defineix la nova funció i decideix quina li surt més a compte.

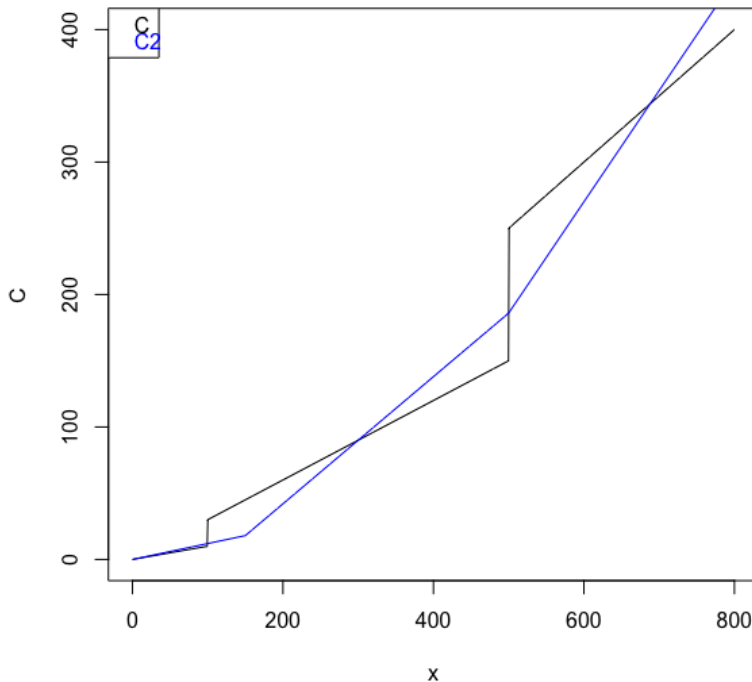
```
C <- function(v){
  ifelse(v<100,
    0.01 *10*v,
    ifelse(v<500,
      0.03*10*v,
      0.05*10*v))}
plot.function(C, from=0, to=800,n=1000)

C2 <- function(v)  ifelse(v<150,
  0.01 *12*v,
  ifelse(v<500,
    0.01 *12*150 + 0.04*12*(v-150),
    0.01 *12*150 + 0.04*12*(500-150) + 0.07*12*(v-500)))
plot.function(C2, from=0, to=800,n=1000, col="blue", add=TRUE)
```

QUIZZ

La funció C_2 que dona les comissions que cobraria en Marc si marxés a la competència,

- = no és continua perquè depèn del nombre de samarretes
- = és continua i derivable
- = és continua però no és derivable perquè hi ha un punt en que no té derivada
- == no és derivable en dos punts del seu domini.



Sembla clar que segons vengui una quantitat de samarretes o altres li surt més a compte l'empresa actual o la de la competència.

No hauries de tenir molts problemes per calcular els punts de tall de les gràfiques, t'ho demanem a l'exercici de més avall.

5 Llista d'exercicis

5.0.1 Acabar 4.0.5

A l'activitat 4.0.5 hem vist gràficament que la funció C_2 surt més a compte que la funció C per alguns valors del nombre v de samarretes que en Marc vengui. Digueu quins són els intervals per v on $C_2(v) > C(v)$.

Solució amb R (mosques a canonades)

```
> C2menysC <- function(v) C2(v)-C(v)
> z1 <- uniroot(C2menysC, c(10,200), tol=1e-10)
> z2 <- uniroot(C2menysC, c(200,400), tol=1e-10)
> z3 <- uniroot(C2menysC, c(400,600), tol=1e-10)
> z4 <- uniroot(C2menysC, c(600,800), tol=1e-10)
> print(paste(z1$root, z2$root, z3$root, z4$root))
[1] "99.9999999999405 300 499.999999999915 688.235294117647"
```

Per tant, hem trobat que C_2 està per sobre C en els intervals $(0, 100)$, $(300, 500)$ i $(688.23, \infty)$.

6 Suplements avançats

7 Exercicis per exàmens