Teoremes de Bolzano, valors extrems

Projecte Math21, Departament Economia i Empresa, UPF

25 de març de 2021

Índex

1 Objectius d'aprenentatge **1**

2 Prerequisits **2**

3 Guia pel professor **2**

3.1 Presentació del tema 2

3.2 Materials bàsics 2

3.2.1 Good Questions 2

4 Activitats autònomes **2**

4.0.1 Teorema de Bolzano 2

4.0.2 act1 4

5 Llista d'exercicis **4**

5.0.1 Exercici 4

6 Suplements avançats **4**

7 Exercicis per exàmens **4**

Aquest és un document de treball INTERN, en fase de discussió i molt preliminar. No en feu difussió, sisplau.

(Enllaç al document principal)
(Enllaç a la versió pdf d'aquest document)
(Enllaç a la font LaTeX)
(Enllaç als fitxers de les figures)

1 Objectius d'aprenentatge

- Teorema de Bolzano
- Solució numèrica d'equacions: l'algoritme de bisecció
- Algoritme de la falsa posició
- Conjunts tancats, oberts
- Conjunts convexos, compactes

2 Prerequisits

3 Guia pel professor

3.1 Presentació del tema

3.2 Materials bàsics

3.2.1 Good Questions

Del projecte del Dept of Mathematics de la Cornell U.

Continuity and Intermediate Value Theorem

1. **[P] True** or **False**: Let $P(t)$ =the cost of parking in New York City's parking garages for t hours. So,

$$P(t) = \$20 \text{ per hour or fraction thereof}$$

For example, if you are in the garage for two hours and one minute, you pay \$60. If t_0 closely approximates some time, T, then $P(t_0)$ closely approximates $P(T)$. Be prepared to justify your answer.

Answer: False. Most students will answer correctly. However, explain how no matter how close t_0 is to T, $P(t_0)$ might not be close to $P(t)$.

2. **[Q]** A drippy faucet adds one milliliter to the volume of water in a tub at precisely one second intervals. Let f be the function that represents the volume of water in the tub at time t.

   (a) f is a continuous function at every time t
   (b) f is continuous for all t other than the precise instants when the water drips into the tub
   (c) f is not continuous at any time t
   (d) not enough information to know where f is continuous.

Answer: (b) Students should be encouraged to draw $f(t)$ and should be able to see the answer quickly. Note that (a) can also be the correct answer, depending on the model that students use for the phenomenon: if the drop of water gradually merges with the water in the tub, the function is continuous with respect to time.

3. **[P]** A drippy faucet adds one milliliter to the volume of water in a tub at precisely one second intervals. Let g be the function that represents the volume of water in the tub as a function of the depth of the water, x, in the tub.

   (a) g is a continuous function at every depth x
   (b) there are some values of x at which g is not continuous
   (c) g is not continuous at any depth, x
   (d) not enough information to know where g is continuous.

Answer: (a) Again, students should be encouraged to draw the graph of $g(x)$. It is interesting to compare this to the previous question. It should be pointed out the difference between the independent variables in the two problems.

4. **[Q]** You know the following statement is true:

   If $f(x)$ is a polynomial, then $f(x)$ is continuous.

7

4 Activitats autònomes

4.0.1 Teorema de Bolzano

Video que explica de manera senzilla el Teorema de Bolzano Bolzano's theorem /explanation and examples by Philip Gorick.

Un video que explica i demostra formalment el Teorem de Bolzano: Bolzano's theorem, Proof and Applications by discovermaths.

Un altre que parla del teorema del valor intermedi, una versió lleugerament diferent però equivalent del teorema Intermediate value theorem to prove a root in an interval (KristaKingMath) (5min)

QUIZZ
El teorema de Bolzano, per una funció definida en un interval tancat $[a, b]$, amb $f(a) \cdot f(b) < 0$
= diu que si existeix algun punt $c \in [a, b]$ amb $f(c) = 0$ llavors f és continua
= diu que no pot existir un punt $c \in [a, b]$ amb $f(c) = 0$ si f no és continua
= diu que existeix un únic punt $c \in [a, b]$ amb $f(c) = 0$ si f és continua
== cap de les anteriors

QUIZZ
Si considerem la funció $y = f(x) = 1/x$ en l'interval $[-1, 1]$

== No es pot aplicar el T. de Bolzano perquè la funció no és continua en l'interval
= No es pot aplicar el T. de Bolzano perquè l'interval no és tancat
= No es pot aplicar el T. de Bolzabo perquè la funció no canvia de signe en l'interval
= El t. de Bolzano ens assegura que hi ha algún $c \in [-1,]$ tal que $f(c) = 0$.

El t. de Bolzano ens assegura l'existència d'una arrel de la funció, però, com la hem de calcular?

El mètode de bisecció és molt util, i molt eficient, per trobar solucions numèriques a equacions, especialment en casos en què la solució numèrica pot ser molt complicada. Per exemple, no sabem resoldre equacions com ara $x^2 + \sqrt{x} = 1$, i segurament no existeix cap mètode per resoldre-les de manera exacta algèbricament, però podem començar dibuixant-ne el gràfic i després resoldre-les numèricament, és a dir, buscant un valor aproximat, tant aproximat com ens interessi.

Mira't aquest video sobre el mètode de bisecció How to locate a root — Bisection Method — ExamSolutions, by ExamSolutions (12 min)

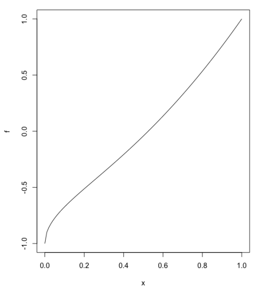
Ara fes-ho amb R, fent servir aquest codi o similar:

```
f= function(x) x^2+sqrt(x)-1
f(0:10)
plot.function(f,0,1)

a= 0
b=1

print("a, (a+b)/2, b")
print(c(a,(a+b)/2, b))
print(c(f(a), f((a+b)/2), f(b)))

# i segons on veiem el canvi de signe, canviem a
    o b
a = (a+b)/2
# o be
b=(a+b)/2
```




```
> a <- 0
> b <- 1
> print("a, (a+b)/2, b")
[1] "a, (a+b)/2, b"
> print(c(a,(a+b)/2, b))
[1] 0.0 0.5 1.0
> print(c(f(a), f((a+b)/2), f(b)))
[1] -1.00000000 -0.04289322  1.00000000
> a=(a+b)/2
> print("a, (a+b)/2, b")
[1] "a, (a+b)/2, b"
> print(c(a,(a+b)/2, b))
[1] 0.50 0.75 1.00
> print(c(f(a), f((a+b)/2), f(b)))
[1] -0.04289322  0.42852540  1.00000000
> b=(a+b)/2
> print("a, (a+b)/2, b")
[1] "a, (a+b)/2, b"
> print(c(a,(a+b)/2, b))
[1] 0.500 0.625 0.750
> print(c(f(a), f((a+b)/2), f(b)))
[1] -0.04289322  0.18119442  0.42852540
```

Segueix repetint el procés i aruat't quan estiguis segur de quina és la primera xifra decimal de l'arrel que estem buscant.

QUIZZ
Digues entre quins límits està l'arrel quan t'has aturat:
== Entre 0.50000 0.53125
= Entre 0.515625 0.531250
=Entre 0.500000 0.515625

De fet, tant R com Geogebra tenen implementat aquest mètode (o d'altres una mica més sofisticats que no veurem. Així, per trobar l'arrel de la funció $f(x) = e^-x - x$, és a dir, per resoldre l'eqüació $e^-x = x$, en R pots teclejar `uniroot(function(x)exp(-x)-x, c(0,5))` on li hem dit que la busqui entre 0 i 5. El resultat ´s molt informatiu, però de moment ens quedem amb l'arrel (root en anglès) que és `0.5671674`.

En Geogebra, podem teclejar simplement `Arrel(exp(-x)-x)` i si estem en mode aproximat obtindrem `0.57`

QUIZZ
Fent servir aquestes ordres, en R o en Geogebra, digues el valor de x que satsifà l'eqüació $x^{0.8} - x^{0.2} - 1 = 0$.
Solució: *2.71096*

4.0.2 act1

5 Llista d'exercicis

5.0.1 Exercici

6 Suplements avançats

7 Exercicis per exàmens