

Funcions de dues variables

Projecte Math21, Departament Economia i Empresa, UPF

25 de març de 2021

Índex

1	Objectius d'aprenentatge	1
2	Prerequisits	2
3	Guia pel professor	2
3.1	Presentació del tema	2
3.2	Materials bàsics	2
4	Activitats autònomes	2
4.0.1	Gràfics amb R, WolframAlpha	2
4.0.2	Gràfics amb Geogebra	2
4.0.3	Les seccions verticals	3
4.0.4	Desplaçament segons els eixos i canvis d'escala	3
5	Llista d'exercicis	4
5.0.1	Exercici	4
6	Suplements avançats	4
6.1	Derivades creuades diferents?	4
7	Exercicis per exàmens	5

Aquest és un document de treball INTERN, en fase de discussió i molt preliminar. No en feu difusió, sisplau.

([Enllaç al document principal](#))
([Enllaç a la versió pdf d'aquest document](#))
([Enllaç a la font LaTeX](#))
([Enllaç als fitxers de les figures](#))

1 Objectius d'aprenentatge

- Definició de funció de dues o més variables.
- Gràfic 3D, gràfic d'isonivells, seccions verticals
- Desplaçaments segons els eixos i canvis d'escala
- Derivades parcials, vector gradient i matriu hessiana

2 Prerequisits

3 Guia pel professor

3.1 Presentació del tema

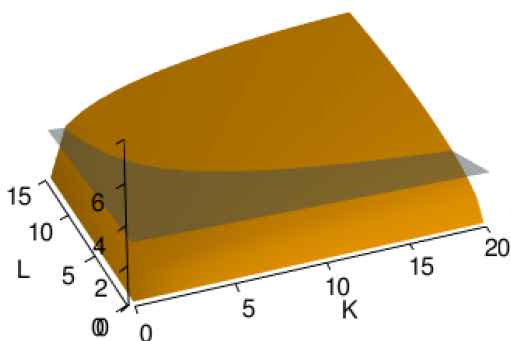
3.2 Materials bàsics

4 Activitats autònomes

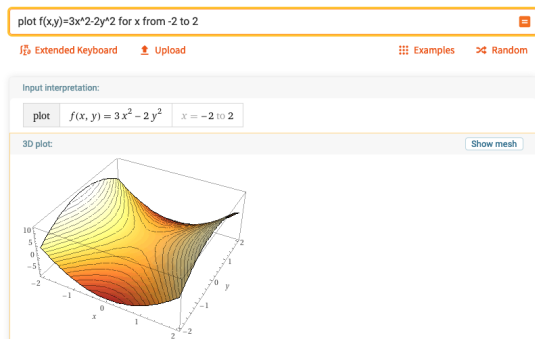
Aquí recollim exemples de possibles activitats, per suposat que caldrà seleccionar-ne algunes i complementar-les amb d'altres ja disponibles.

4.0.1 Gràfics amb R, WolframAlpha

Amb R, segueix pas a pas les explicacions que trobaras [aquí](#) per obtenir coses com això:



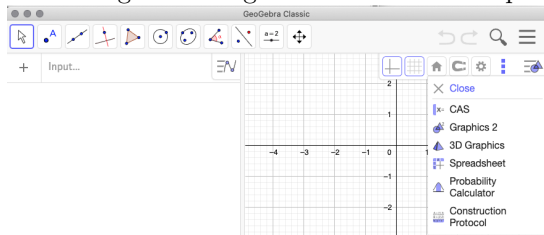
Amb Wolfram Alpha, només introduir una expressió ja ens dona els gràfics:



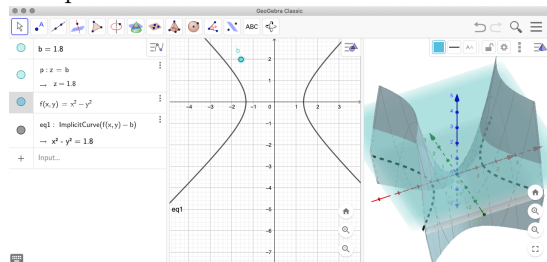
Un cop tens el gràfic pots triar si vols veure dibuixats sobre la superfície els isonivells o les línies de seccions verticals/horitzontals.

4.0.2 Gràfics amb Geogebra

Amb Geogebra les figures 3D són fàcils de produir, cal que obriu una finestra 3D:



I després entrar coses com això:

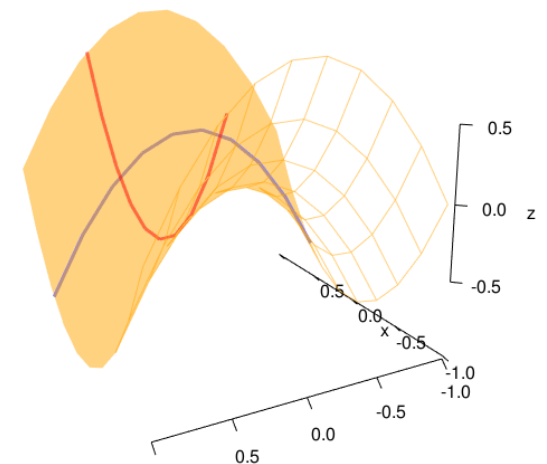


(Pots trobar-ho [aquí](#). Si tens el Geogebra en Català, la instrucció serà `CorbaImplicita`)

Els gràfics d'isonivells no són tan fàcils de fer, però podeu trobar applets que ho facin.

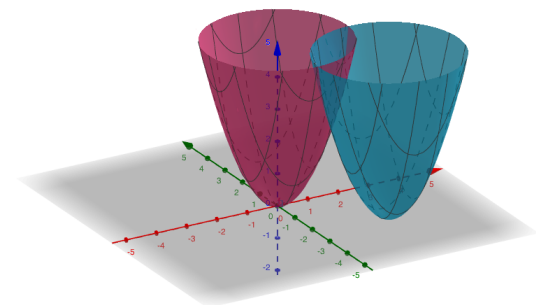
4.0.3 Les seccions verticals

En molts dels gràfics 3D que hem vist fins ara la superfície està resseguida per unes línies que corresponen a valors fixos de x o de y . Si fixem una de les variables, per exemple $x = k$ per k constant, el que tenim és una funció d'una variable $z = z(y) = f(k, y)$ i la seva gràfica correspon a la secció vertical de la superfície $z = f(x, y)$ segons el pla $x = k$. Mira't i reproduueix el que fem [aquí amb R](#). Obtindràs figures com aquesta:



4.0.4 Desplaçament segons els eixos i canvis d'escala

Obre l'enllaç [de Geogebra](#). Veuràs alguna cosa com això:

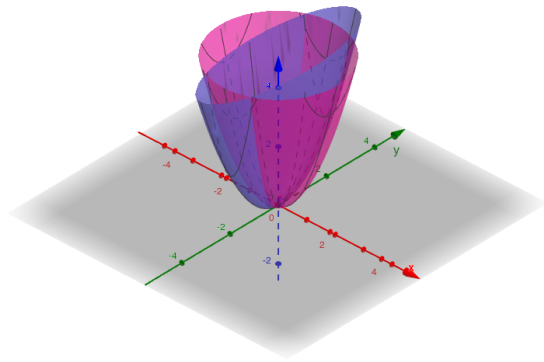


Prova de desplaçar els lliscants corresponents a a i a b . Com expliques el què està passant?

Posa-hi ara la funció $g(x, y) = (x - a)^2 - (y - b)^3$. Quan a és positiu, cap a on es desplaça la gràfica? I quan b és positiu?

Ara hi posem la funció $g(x, y) = (ax)^2 + (by)^2$. Posar al davant de la x un coeficient, per exemple $a = 10$ vol dir que enlloc de mesurar les x en centímetres les passem a mesurar en mil·límetres, hem canviat l'escala. Pot veure l'efecte

sobre el gràfic [en aquest applet de Geogebra](#).



Ara pots contestar les següents preguntes:

QUIZZ

Si a la funció $z = f(x, y)$ hi posem $z = f(ax, y)$, el graf de la funció = es contrau en la direcció de l'eix x si $a > 0$ = es contrau en la direcció de l'eix x si $a > 1$ = es contrau en la direcció de l'eix y si $a < 1$ == es contrau en la direcció de l'eix x si $a > 1$

QUIZZ

i molts com aquest.

QUIZZ

Si tenim una corba d'isonivell donada per $u(x, y) = u_0$, la gràfica de la corba d'isonivell $u(x + 2, y) = u_0$
 = estarà dues unitats més amunt
 = estarà dues unitats més avall
 = estarà dues unitats més a la dreta
 == estarà dues unitats més a l'esquerra
 = cap de les anteriors

QUIZZ

Si tenim una corba d'isonivell donada per $u(x, y) = u_0$, la gràfica de la corba d'isonivell $u(x, y) - 2 = u_0$
 = estarà dues unitats més amunt
 = estarà dues unitats més avall
 = estarà dues unitats més a la dreta
 = estarà dues unitats més a l'esquerra
 == cap de les anteriors

5 Llista d'exercicis

5.0.1 Exercici

6 Suplements avançats

6.1 Derivades creuades diferents?

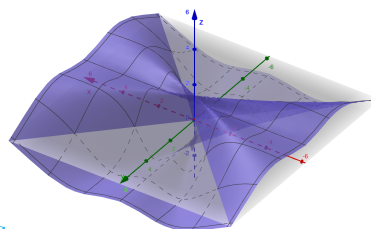
Una activitat autònoma per alumnes espavilats, per matrícula?.

Hem vist que les derivades creuades $\frac{\partial z}{\partial x \partial y}$ i $\frac{\partial z}{\partial y \partial x}$ són iguals. Sempre? No, per assegurar-ho cal que siguin contínues. Pots mirar a la Wikipedia [Symmetry of second derivatives](#), informació sobre el tema. Pots resseguir els càlcul de l'exemple que mostra que si no hi ha continuïtat la simetria pot no complir-se.

A ma, o amb Geogebra o Wolfram Alpha o similar, defineix la funció $f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$. La funció no queda definida en el $(0, 0)$, o sigui que hi afegim la definició $f(0, 0) = 0$ amb la qual cosa la funció és contínua.

Calcula ara les derivades respecte x , $f'_x(x, y)$, i respecte y , $f'_y(x, y)$. Per calcular la derivada segona $f''_{xy}(0, 0)$ calcula

$f'_x(0, y)$ i per calcular $f''_{yx}(0, 0)$ calcula $f'_y(x, 0)$. Segons això, què obtens per $\frac{d}{dy} f'_x(0, y)$? I què obtens per $\frac{d}{dx} f'_y(x, 0)$? Són iguals? Calcula i grafica la segona derivada $f''_{xy}(x, y)$ i observa què passa a prop del $(0, 0)$.



Solució: [en Geogebra](#)

7 Exercicis per exàmens

QUIZZ

Si tens el gràfic 3D d'una funció $f(x, y)$ amb l'eix z en vertical com solem fer-ho. Una secció vertical segons un pla paral·lel al pla ZX , correspon, per alguna constant k , a:

- = una corba de nivell $z = k$
- = una funció d'una variable $z = f(k, y)$
- == una funció d'una variable $z = f(x, k)$
- = Cap de les altres és veritable.

QUIZZ

Si dues corbes de nivell, de nivells respectius a i b corresponents a una funció $f(x, y)$ tenen un punt en comú,

- = Una de les dues ha de ser només un punt
- = Això no pot donar-se mai
- = Podem assegurar que $a = b$
- = Les derivades parcials en aquell punt han de ser zero.