

Espais vectorials

25 de març de 2021

Índex

1 Objectius d'aprenentatge	1
2 Prerequisits	2
3 Guia pel professor	2
3.1 Presentació del tema	2
3.2 Materials bàsics	2
4 Activitats autònomes	2
4.0.1 Videos sobre Espais Vectorials (abstractes)	2
4.0.2 CL de vectors en l'espai	3
5 Llista d'exercicis	3
5.0.1 Exercici	3
5.0.2 Exercici	3
6 Suplements avançats	3
7 Exercicis per exàmens	3

Aquest és un document de treball INTERN, en fase de discussió i molt preliminar. No en feu difusió, sisplau.

([Enllaç al document principal](#))
([Enllaç a la versió pdf d'aquest document](#))
([Enllaç a la font LaTeX](#))
([Enllaç als fitxers de les figures](#))

1 Objectius d'aprenentatge

- Definicions d'espai vectorial abstracte, exemples
- Propietats bàsiques que se'n deriven
- Combinacions lineals, espai generat
- Subespai vectorial: definicions i propietats bàsiques
- Independència lineal
- Base d'un espai vectorial, dimensió.

2 Prerequisits

A temes anteriors s'han vist ja els vectors del pla i de l'espai, aquí seguiran servint com a exemples bàsics sobre els que fonamentar la intuïció.

3 Guia pel professor

En temes anteriors s'han vist els vectors del pla i de l'espai, potser en algun cas vectors de $\mathcal{R}^n$, però aquí es vol introduir la visió abstracta de l'estructura d'espai vectorial. Naturalment, només una pinzellada per obrir gana als estudiants que puguin copsar-la.

En aquest i el següent tema es pretén introduir (o reforçar) la capacitat d'abstracció matemàtica amb els conceptes d'espai vectorial general i la manipulació algebraica de símbols que representen vectors o matrius.

És molt probable que a alguns estudiants això els costi molt d'assolir, se'ls requerirà com a mínim que aprenguin les definicions i propietats bàsiques, però l'objectiu del plantejament ha de ser que alguns estudiants vegin com el procés de definició-propietats-teoremes permet construir un entramat de conceptes aplicables a diferents contextos sòlidament.

El fet que dues bases tenen el mateix nombre d'elements s'acceptarà sense demostració. A partir d'aquí sí que es poden demanar petites demostracions de molts fets interessants.

Cal insistir en les demostracions, senzilles per suposat, però importants per mostrar la solidesa formal.

3.1 Presentació del tema

El tema es plantejarà a partir de la definició d'EV, mostrar-ne exemples: $\mathcal{R}^n$, Polinomis de grau fins a n , funcions derivables, matrius $m \times n$ etc.

Pensant en els vídeos que els recomanem, s'aclarirà que cal diferenciar els vectors dels escalars per la notació que s'hi empri, sigui $\mathbf{v}$, $\bar{\mathbf{v}}$, $\mathbf{v}$ o la que sigui.

A partir dels axiomes, es deduiran propietats simples com ara $0 \cdot \mathbf{v} = 0$

Definició de subespai, de CL en general, d'espai generat per un conjunt de vectors.

Definició d'IL. Crec que ens parem aquí. En els temes d'àlgebra matricial i de diagonalització es podrà aplicar i ampliar una mica.

3.2 Materials bàsics

El tema plantejat en abstracte no apareix en els llibres de text que utilitzem normalment. Caldrà escriure un breu resum de les definicions i propietats que volem que adquireixin, que no són moltes.

Pot servir de referència (avançada) ÀLGEBRA LINEAL, ApuntsFMEBarcelona, Gener 2019, de Andreu Boix, Paolo Lammens, FME-UPC. https://apuntsfme.gitlab.io/pdfs/primer/algebra_lineal.pdf

4 Activitats autònomes

4.0.1 Vídeos sobre Espais Vectorials (abstractes)

VECTOR SPACES - LINEAR ALGEBRA <https://www.youtube.com/watch?v=XDvSsDsLVLs> 13min TheTrevTutor

Abstract vector spaces — Essence of linear algebra, chapter 15 <https://www.youtube.com/watch?v=TgKwz5Ikpc8> 16min 3Blue1Brown. Esmenta alguns conceptes que no hem vist encara, però l'enfocament és interessant.

The tools of linear algebra are extremely general, applying not just to the familiar vectors that we picture as arrows in space, but to all sorts of mathematical objects, like functions. This generality is captured with the notion of an abstract vector space.

4.0.2 CL de vectors en l'espai

Visualització en geogebra. https://youtu.be/uiz5_nK00-E

5 Llista d'exercicis

5.0.1 Exercici

Podem aprofitar exercicis de <http://www.xtec.cat/~dcastell/webatxillerat/ev/evexeresolts.htm>.

A la pàgina 12 dels apunts de la U. d'Alacant (més avall) també hi ha una colecció d'exercicis aprofitables.

5.0.2 Exercici

Cal pensar exercicis del tipus:

1. Donats vectors $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ d'un espai vectorial que són linealment independents, demostrar que si substituïm $\mathbf{v}_1$ per $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ el conjunt de vectors resultant segueix essent linealment independent.
2. Aplicant la definició, demostra que el conjunt de vectors $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ és LD.
3. Aplicant la definició, demostra que el conjunt de vectors $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1\}$ és LD.
4. Considerem l'espai vectorial del polinomis en x de grau menor que tres, inclòs el polinomi nul. Demostra que els vectors $\{2 - x^2, 3 + x^2, 1 + x\}$ són LI.

6 Suplements avançats

Pot servir de referència (avançada) ÀLGEBRA LINEAL, ApuntsFMEBarcelona, Gener 2019, de Andreu Boix, Paolo Lammens, FME-UPC. https://apuntsfme.gitlab.io/pdfs/primer/algebra_lineal.pdf

El text [ELEMENTS D'ÀLGEBRA LINEAL](#) de Xaro Soler Escrivà, Universitat d'Alacant, és més senzill, té molts exemples i exercicis però se salta moltes demostracions.

7 Exercicis per exàmens