

Diagonalització, aplicacions

Projecte Math21, Departament Economia i Empresa, UPF

25 de març de 2021

Índex

1	Objectius d'aprenentatge	1
2	Prerequisits	2
3	Guia pel professor	2
3.1	Presentació del tema	2
3.2	Materials bàsics	2
4	Activitats autònomes	2
4.1	Clickers	2
4.1.1	act1	2
4.1.2	Càlcul de auto-vv amb Geogebra, R	2
5	Llista d'exercicis	4
5.0.1	Exercici, per exemple,	4
6	Suplements avançats	5
7	Exercicis per exàmens	5

Aquest és un document de treball INTERN, en fase de discussió i molt preliminar. No en feu difusió, sisplau.

([Enllaç al document principal](#))
([Enllaç a la versió pdf d'aquest document](#))
([Enllaç a la font LaTeX](#))
([Enllaç als fitxers de les figures](#))

1 Objectius d'aprenentatge

- Auto vectors/valors, propietats
- Teorema espectral
- Classificació de FQ segons valors propis, regla de Descartes
- Concavitat/convexitat de formes quadràtiques

2 Prerequisits

3 Guia pel professor

Es donarà molta més importància a les petites demostracions de les propietats dels auto-valors/vectors que no pas al seu càlcul.

El càlcul es mostrarà en alguns casos senzills i es deixarà per Geogebra, R o wolframAlpha.

3.1 Presentació del tema

3.2 Materials bàsics

4 Activitats autònomes

4.1 Clickers

Se'n poden trobar a <https://pi.math.cornell.edu/~maria/gq/str.pdf> a partir de la pàgina 28.

Aquí recollim exemples de possibles activitats, per suposat que caldrà seleccionar-ne algunes i complementar-les amb d'altres ja disponibles.

4.1.1 act1

4.1.2 Càlcul de auto-vv amb Geogebra, R

Amb geogebra, les matrius s'entren en la forma $\{\{2, 1, 2\}, \{1, 1, -1\}, \{2, -1, 0\}\}$. Aquí fem servir la finestra CAS de Geogebra, recorda que per donar nom a un matriu hem d'escriure $A := \dots$

The screenshot shows the Geogebra CAS window with the following steps:

- $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
- $\rightarrow \mathbf{A} := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
- Valorspropis(A)
 $\rightarrow \{1.6, -1.9, 3.29\}$
- Vectorspropis(A)
 $\rightarrow \begin{pmatrix} -0.08 & 0.5 & 0.86 \\ -0.89 & -0.43 & 0.17 \\ 0.46 & -0.75 & 0.47 \end{pmatrix}$
- $B := \{\{1, 0, 0, 1\}, \{0, 0, 1, 1\}, \{0, 1, -1, 1\}, \{1, 1, 1, -1\}\}$
- $\rightarrow \mathbf{B} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
- Vectorspropis(B)
 $\rightarrow \begin{pmatrix} -0.73 & 0.14 & -0.24 & 0.62 \\ 0.57 & 0.67 & -0.09 & 0.47 \\ 0.37 & -0.64 & -0.58 & 0.35 \\ 0.11 & -0.36 & 0.77 & 0.51 \end{pmatrix}$
- Valorspropis(B)
 $\rightarrow \{0.85, -1.49, -2.18, 1.82\}$

Amb R, (cal adaptar això)

```
#####
## valors i vectors propis
#####
> A = matrix(c(2,1,2,1,1,-1,2,-1,0), nrow = 3)
> A
      [,1] [,2] [,3]
[1,]    2    1    2
[2,]    1    1   -1
[3,]    2   -1    0
> eigs = eigen(A) # o qualsevol nom que ens agradi
> names(eigs) # eigs te ara dos components:
[1] "values" "vectors"
> eigs$values
[1]  3.292402  1.602705 -1.895107
> eigs$vectors
      [,1]      [,2]      [,3]
[1,] 0.8642795 -0.07589338  0.4972536
[2,] 0.1705987 -0.88573564 -0.4317041
[3,] 0.4731987  0.45794385 -0.7525758
## els vectors van en columnes
## comprovem que la columna 1 i la columna 2 son ortogonals:
> sum(eigs$vectors[,1]*eigs$vectors[,2])
[1] 9.714451e-17
> eigs$vectors %*% t(eigs$vectors)
      [,1]      [,2]      [,3]
[1,] 1.000000e+00  1.110223e-16  1.110223e-16
[2,] 1.110223e-16  1.000000e+00 -3.330669e-16
[3,] 1.110223e-16 -3.330669e-16  1.000000e+00
```

QUIZZ

Explica el que hem fet a la darrera instrucció del llistat anterior i el resultat que hem obtingut.

A WolframAlpha, només cal entrar la matriu, també en la forma $\{\{2, 1, 2\}, \{1, 1, -1\}, \{2, -1, 0\}\}$ i ens dona molta informació, determinant, inversa, eigenvalues (valors propis), eigenvectors (vectors propis), etc.

Les capacitats simbòliques de WolframAlpha ens permeten treballar amb matrius que depenen d'algun paràmetre, per exemple,

$\{\{1,0,0\}, \{0,a,-1\}, \{0,-1,0\}\}$

 Extended Keyboard

 Upload

Input:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dimensions:

3 (rows) $\times$ 3 (columns)

Property:

symmetric

Trace:

$a + 1$

Determinant:

-1

Characteristic polynomial:

$$a\lambda^2 - a\lambda - \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1$$

Eigenvalues:

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left(a - \sqrt{a^2 + 4} \right)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{a^2 + 4} + a \right)$$

Eigenvectors:

$$v_1 = (1, 0, 0)$$

$$v_2 = \left(0, \frac{1}{2} \left(-a + \sqrt{4 + a^2} \right), 1 \right)$$

$$v_3 = \left(0, \frac{1}{2} \left(-a - \sqrt{4 + a^2} \right), 1 \right)$$

5 Llista d'exercicis

5.0.1 Exercici, per exemple,

Utilitzant WolframAlpha o similar, digues per a quins valors de a la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

té un valor propi doble.

Solució: Per $a = \pm 2$

6 Suplements avançats

Es podria plantejar la SVD?

7 Exercicis per exàmens

- Demuestra que si $\lambda, \mathbf{v}$ és un eigen parell, $k\mathbf{v}$ és vector propi amb el mateix valor propi.
- És cert que si $\lambda, \mathbf{v}$ és un eigen parell, llavors $k\lambda$ també és valor propi amb vector propi $\frac{1}{k}\mathbf{v}$. Si és cert, demostra-ho, si no, dona un contraexemple amb una matriu de 2×2 .